ISG 2002 Option économique

Exercice 1

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par :

$$x \mapsto f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

   (a) Etudier le sens de variation de la fonction h_n définie sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par :

$$x \mapsto h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

   Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de $h_n(x)$.

   (b) Pour tout x appartenant à $]-1,+\infty[$ montrer que $f_1'(x) = h_1(x)$
   et que, pour tout entier n strictement supérieur à 1, $\quad f_n'(x) = x^{n-1}h_n(x)$.

   (c) On suppose n impair. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n, en précisant ses limites en -1 et en $+\infty$.

   (d) On suppose n pair. Dresser de même le tableau de variation de f_n, en précisant ses limites en -1 et en $-\infty$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\qquad u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx.$

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $\qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}.$

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

   (c) Jusitifer que, pour tout x appartenant à $[0,1]$, on a : $\dfrac{x^2}{1+x} = x - 1 + \dfrac{1}{1+x}.$
   Puis calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx.$

   (d) Calculer u_1 au moyen d'une intégration par parties.

   (e) Pour tout x de $[0,1]$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose : $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^k.$

   - Montrer que : $S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}.$
   - Etablir l'égalité $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + .. + \dfrac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx.$
   - Montrer que : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leqslant \frac{1}{n+2}.$
   - En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + .. + \frac{(-1)^n}{n+1})$

3. (a) A l'aide d'une intégration par parties démontrer que :

$$u_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + .. + \frac{(-1)^n}{n+1})\right]$$

(b) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2

On considère l'ensemble E des matrices carrées d'ordre 3 défini par

$$E = \{M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \ / \ a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3.
2. Justifier que les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ forment une base de E.
3. La matrice $M(1,1)$ est-elle inversible ?
   (a) Vérifier que $J^2 = 2I + J$, en déduire que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(a',b') \in \mathbb{R}^2$ $\quad M(a,b)M(a',b')$ est un élément de E.
   (b) En déduire que la matrice $M(2,1)$ est inversible et que son inverse est un élément de E.
4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice J. En déduire que J est diagonalisable. Ce résultat était-il prévisible ?
   Montrer que toute base de vecteurs propres de J est aussi une base de vecteurs propres de la matrice $M(a,b)$

Exercice 3

On considère la fonction f qui à tout réel x associe le réel $f(x)$ tel que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{3}{(1+x)^4} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. (a) Etudier la continuité de la fonction f.
   (b) Donner le sens de variation de f.
   (c) Montrer que f est une densité de probabilité.
2. On note X la variable aléatoire réelle de densité f.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $1 + X$, en déduire l'espérance de X.
   (c) Calculer l'espérance $E((1 + X)^2)$. En déduire la variance de X
3. On note Y la variable aléatoire à valeurs entières définie par : $Y = [X]$, $[X]$ désignant la partie entière de X.

(a) Calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité $P(Y = k)$.

(b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k^2 + 3k + \dfrac{7}{3}}{(k+1)^3(k+2)^3} \right)$.

(c) Calculer la probabilité $P(Y \leqslant 1)$.

(d) Calculer la probabilité conditionnelle : $P(Y \leqslant 1 / Y \leqslant 2)$.