ISG 2002 Option technologique

Exercice 1

1. On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

   (a) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}$.

   (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont monotones.

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$.

   (d) En déduire que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont convergentes et de même limite.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note $S_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

   (a) Montrer que $u_{2n} - u_n = S_n - \ln 2$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on note :

$$T_n = \exp\left(\frac{\ln 2}{n+1}\right) + \exp\left(\frac{\ln 2}{n+2}\right) + \cdots + \exp\left(\frac{\ln 2}{2n}\right) - n;$$

   (a) Etablir que pour tout x de l'intervalle $]0;1]$: $1 + x < \exp(x) < 1 + x + x^2$.

   (b) En déduire un encadrement de T_n.

   (c) Justifier que : $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2} < \dfrac{1}{n}$.

   (d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Exercice 2

On donne un réel x et un entier n tels que : $0 < x < 1$ et $n \geqslant 2$.
On estime que dans une population f la proportion d'individus connaissant la signification du sigle M.B.A est x.
On interroge n personnes de la population F et on demande à chacune d'entre elle de choisir entre trois définitions différentes A_1 , A_2 , A_3 du sigle M.B.A. celle qui lui paraît la bonne.
La définition A_1 étant la définition exacte, on admet que les personnes connaissant la définition du sigle M.B.A. choisissent nécessairement A_1 , les autres personnes (ignorantes) répondent au hasard.
De plus, on suppose que les réponses fournies par les différentes personnes sont indépendantes entre elles.
On note :

C l'événement " la personne choisie connait la signification du sigle M.B.A."
D_i l'événement " la personne choisie donne la réponse A_i", $1 \leqslant i \leqslant 3$

1. (a) Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, on note p_i les probabilités $p_i = p(D_i)$.
   Montrer que $p_1 = \dfrac{1+2x}{3}$ et $p_2 = p_3 = \dfrac{1-x}{3}$.

(b) Calculer la probabilité $q(x)$ qu'une personne ayant choisie la réponse A_1 connaisse la signification du sigle M.B.A.

2. Pour $i = 1,\ 2,\ 3$, on désigne par X_i la variable aléatoire réelle prenant pour valeurs le nombre de réponse A_i choisies par les n personnes interrogées.

   (a) Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire X_i.

   (b) Calculer l'espérance m_i et l'écart-type σ_i de chaque variable aléatoire X_i.

   (c) Montrer que, pour $i = 2$ et 3, $\quad m_i < \dfrac{n}{3} < m_1$.

   (d) Montrer que pour $i = 1,\ 2,\ 3$, $(\sigma_i)^2 \leqslant \dfrac{n}{4}$.

3. On veut estimer la valeur de x , pour ce faire on constitue n échantillons de 30 personnes chacun.
   Les échantillons étant notés $e_1, e_2, \ldots, e_N$.
   Pour $1 \leqslant j \leqslant N$, on note Y_j le nombre de personnes de l'échantillon e_j ayant choisi la réponse A_1.
   On pose $Z_N = \dfrac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N}{N}$

   (a) Pour tout j , $1 \leqslant j \leqslant N$, donner, en fonction de x, l'espérance et la variance de Y_j.

   (b) En déduire, en fonction de x et de n, l'espérance $E(Z_N)$ et la variance $V(Z_N)$ de Z_N.

   (c) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, montrer que, pour tout réel t strictement positif,

$$0 \leqslant p\left(|Z_N - m_1| \geqslant t\right) \leqslant \frac{30}{4Nt^2}.$$

   (d) En déduire que : $\lim\limits_{N \to +\infty} p\left(|Z_N - m_1| < t\right) = 1$.
   Ainsi, Z est une bonne approximation de m_1.

   (e) Sur 50 échantillons de 30 personnes, on a relevé une moyenne $Z_{50} = 12$ (de réponses A_1).
   Donner, alors, une estimation de x.