

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Problème d'Analyse

1. Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $f(0) = 1$ et $\forall t \neq 0, f(t) = \frac{\arctan(t)}{t}$.

- (a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} et paire.
- (b) Donner le développement limité à l'ordre 1 de $f(t)$ au voisinage de 0.
En déduire que f est dérivable en 0, et donner $f'(0)$.
- (c) Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} , et calculer $f'(t)$, pour $t \in \mathbb{R}^\times$.

(d) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^\times, \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$.

En déduire le sens de variation de f .

- (e) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).
(On ne demande pas l'étude des points d'inflexion)

2. Soit ϕ l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $\phi(0) = 1$ et $\forall x \neq 0, \phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

- (a) Montrer que ϕ est continue sur \mathbb{R} et paire.
- (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \phi(x) \leq 1$. (on pourra commencer par supposer $x > 0$)
- (c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \phi'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - \phi(x))$.

Montrer que ϕ est dérivable en 0, avec $\phi'(0) = 0$. Donner les variations de ϕ .

(d) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$.

- (e) Tracer la courbe représentative de ϕ dans le même repère que celle de f .
(On ne demande pas l'étude des points d'inflexions)

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} = \phi(u_n)$, où ϕ est l'application du 2).

- (a) Montrer que : $\forall t \geq 0, 0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.

(b) Montrer que, pour tout x strictement positif : $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{x} (1 - f(x)) = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$. (On pourra utiliser 2.2 et 2.3).

En déduire que, pour tout x strictement positif : $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$, et que cette inégalité reste vérifiée pour tout x de \mathbb{R} .

(c) Montrer que l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = x$ admet une unique solution. On note α cette solution. Montrer que $\alpha \in]0; 1]$.

(d) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.

En déduire que (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

4. On considère l'équation différentielle : $x^2 y' + xy = \arctan(x)$.

(a) Résoudre cette équation différentielle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que ϕ est l'unique solution sur \mathbb{R} de cette équation différentielle.

Problème d'Algèbre

Dans ce problème, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension trois, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E . La norme de E est notée $\|\cdot\|$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E , $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E , Id_E l'application identique de E , o_E le vecteur nul de E .

\mathcal{E} désigne un espace affine euclidien associé à E , $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormé de \mathcal{E} .

1. Soit ψ l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à \mathcal{B} est $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $\frac{4}{3}\psi$ est un demi-tour dont on précisera l'axe D .

(b) En déduire que ψ est la composée commutative de deux endomorphismes simples de E que l'on précisera.

2. On note \mathcal{S} l'ensemble des endomorphismes φ de E pour lesquels :

$$\exists k \in [0; 1[, \quad \forall x \in E, \quad \|\varphi(x)\| \leq k \|x\|$$

(a) Montrer que ψ appartient à $\mathcal{S} \cap GL(E)$.

(b) Id_E appartient-il à \mathcal{S} ?

(c) Montrer que \mathcal{S} est stable pour \circ . $\mathcal{S} \cap GL(E)$ est-il un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$?

(d) Soit φ un élément de \mathcal{S} . Montrer que $\ker(\varphi - \text{Id}_E) = \{o_E\}$. En déduire que $(\varphi - \text{Id}_E)$ appartient à $GL(E)$.

(e) Montrer que $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\exists k \in [0; 1[, \quad \forall x \in E, (\|x\| = 1 \implies \|\varphi(x)\| \leq k)$.

(f) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de φ est diagonale, à éléments diagonaux inférieurs à 1 en valeur absolue.

Montrer que $\varphi \in \mathcal{S}$.

3. Soit μ l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à \mathcal{B} est $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) On définit : $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_3)$, $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - e_2 + 2e_3)$.

Vérifier que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base orthonormée \mathcal{B}' de E .

(b) Déterminer la matrice de μ dans la base \mathcal{B}' . En déduire que $\mu \in \mathcal{S}$.

4. Soit φ_α l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à \mathcal{B} est $M_\alpha = \alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On se propose de prouver que $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$ si et seulement si $|\alpha| < \frac{1}{2}$.

Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ un vecteur de E de norme 1.

(a) Montrer que : $\|\varphi_\alpha(x)\|^2 = \alpha^2 (1 + (x_1 - x_2 - x_3)^2)$.

(b) Le vecteur x s'écrit, dans la base \mathcal{B}' du 3.1 : $x = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + x'_3e'_3$.

Montrer que : $\|\varphi_\alpha(x)\|^2 = \alpha^2 (1 + 3x_1'^2)$. En déduire que : $\|\varphi_\alpha(x)\| \leq 2|\alpha|$.

Déterminer l'ensemble des x de E de norme 1 pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité.

(c) Montrer que $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$ si et seulement si $|\alpha| < \frac{1}{2}$.

5. Soit f une application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} dont l'endomorphisme associé φ appartient à \mathcal{S} .

(a) Soit M un point de \mathcal{E} . Montrer que M est invariant par f si et seulement si

$$(\varphi - \text{Id}_E)(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O}.$$

(b) En déduire que f admet un point invariant et un seul, que l'on note Ω .

(c) Justifier l'égalité : $\forall M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{\Omega f(M)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M})$.

(d) On définit la suite (M_n) de points de \mathcal{E} par $M_0 \in \mathcal{E}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = f(M_n)$.

i. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\overrightarrow{\Omega M_n}\| = 0$.

ii. Soient (x_n) , (y_n) et (z_n) les suites réelles définies par x_0, y_0 et z_0 sont des réels, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{4}z_n + \frac{1}{2} \\ z_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}z_n + 1 \end{cases}$$

Montrer que (x_n) , (y_n) et (z_n) sont convergentes, et préciser leurs limites respectives.