1 Exercices

Exercice 1.1 Soit A une matrice carrée à coefficients complexes d'ordre n. On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de B en fonction de celles de A.
2. On suppose dans cette question que A est inversible.
   Montrer que A est diagonalisable ssi B l'est.
3. Qu'en est-il si A n'est plus inversible ?

Exercice 1.2 Soit $\mathbb{K}$ un corps et soit (E) l'équation $X^3 - 2X^2 + I_n = 0_n$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Résoudre l'équation lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
2. On suppose désormais que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.
   (a) Montrer que si X est une solution de (E) alors $\operatorname{tr}(X) \in \mathbb{N}$ et $\det(X) = \pm 1$
   (b) Résoudre l'équation (E) lorsque $n = 2$ puis lorsque $n = 3$.

Exercice 1.3 Soient des matrices carrées complexes d'ordre n, A et B, telles que $AB = 0$.

1. Montrer que A et B ont un vecteur propre en commun.
2. Montrer que A et B sont co-trigonalisables
   (c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures).

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Considérer un vecteur propre de B de la forme $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 et x_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et réécrire l'égalité $Bx = \lambda x$ sous la forme d'un système en (x_1, x_2). En déduire que x_1 est un vecteur propre de A pour une certaine valeur propre.

2. Utiliser que A admet un polynôme P annulateur à racines simples et vérifier que $P(X^2)$ est un polynôme annulateur pour B (on calculera B^2) Réciproquement, si B est diagonalisable, alors B^2 l'est aussi. Montrer que si Q est un polynôme annulateur de B^2 alors c'est un polynôme annulateur pour A.

3. La réciproque est fausse (prendre $n = 1$ et $A = 0$).

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. La matrice X admet un polynôme annulateur à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc X est diagonalisable et elle est de la forme PDP^{-1}. Vérifier que D est également solution de l'équation, ce qui fournit les valeurs possibles pour D donc pour X. La réciproque est facile.

2. (a) Diagonaliser X dans $\mathbb{R}$ donc sa trace est de la forme $\mathrm{tr}(X) = a + br_+ + cr_-$, où r_+ et r_- sont les deux valeurs propres possibles et non rationnelles de X et où a, b, c sont des entiers (les multiplicités des valeurs propres éventuelles). Puisque X est à coefficients rationnels, sa trace est également à coefficients rationnels, ce qui implique que $br_+ + cr_- \in \mathbb{Q}$. En écrivant $r_\pm = \alpha \pm \beta\sqrt{\delta}$, on obtient que nécessairement $b = c$ donc $\mathrm{tr}(X) = a + b(r_+ + r_-) \in \mathbb{N}$. Pour le déterminant, il suffit de voir qu'il s'agit du produit des valeurs propres de X (et que $b = c$)

   (b) A l'aide de la question précédente, on a que $\mathrm{tr}(X) = a + b$ (a étant la multiplicité de la valeur propre rationnelle et b celle d'une des deux valeurs propres non rationnelles) etl'on a $a + b + c = n$ (car X est diagonalisable)
   Lorsque $n = 2$, montrer que l'on a nécessairement $b = c = 1$ et $a = 0$ ou $b = c = 0$ et $a = 2$. Dans le second cas, on obtient immédiatement la forme de X. Pour le premier cas, on vérifie que $x^2 - x - 1$ est un polynôme annulateur de X. Montrer que si $e \in \mathbb{Q}^2$ est un vecteur non nul, alors (e, Xe) est une base de $\mathbb{Q}^2$ et montrer alors que X est conjugué (dans $GL_2(\mathbb{Q})$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Lorsque $n = 3$, montrer que soit $a = 3$ et $b = c = 0$, soit $a = 1$ et $b = c = 1$. Le premier cas fournit immédiatement la forme de X. Pour le second cas, utiliser le théorème des noyaux (sur $\mathbb{Q}$ et non sur $\mathbb{R}$!!) et se ramener au cas $n = 2$ (c'est la dimension de l'un des deux espaces)

Indication pour l'exercice 1.3 : Soient des matrices carrées complexes d'ordre n, A et B, telles que $AB = 0$.

1. Le cas où l'une des deux matrices est inversible est immédiat.
   On suppose donc A et B non inversibles et que ni A, ni B ne sont nulles.
   Soit B admet un vecteur propre x associé à une valeur λ non nulle, montrer que $x \in \ker A$
   Soit B n'admet que 0 comme valeur propre, considérer b l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est B et justifier que $b_{|\mathrm{Im}(B)}$ est un endomorphisme. En déduire l'existence d'un vecteur propre pour b qui est alors nécessairement dans $\ker A$.

2. On procède par récurrence sur la dimension.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. Soient λ une valeur propre de B et $X \in \mathbb{C}^{2n}$ un vecteur propre associé. On peut écrire X sous la forme $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ avec x_1, x_2 appartenant à $\mathbb{C}^{2n}$. En utilisant le produit matriciel par bloc, on a
$$BX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ Ax_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_2 = \lambda x_1 \\ Ax_1 = \lambda x_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_2 = \lambda x_1 \\ Ax_1 = \lambda^2 x_1 \end{array} \right.$$
Puisque X est un vecteur non nul, on est assuré que x_1 ou x_2 sont non nuls. Supposons que $x_1 = 0$ donc $x_2 = 0$ ce qui entraine que $X = 0$, ce qui est absurde donc $x_1 \neq 0$. Par conséquent, x_1 est un vecteur non nul et il vérifie $Ax_1 = \lambda^2 x_1$ donc x_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ^2 donc λ^2 est une valeur propre de A.
Réciproquement, si μ est une valeur propre de A, il existe un complexe δ tel que $\mu = \delta^2$ et considérons $x^{(0)}$ un vecteur propre associé à μ. Le vecteur $X = \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ \delta x^{(0)} \end{pmatrix}$ est non nul (puisque $x^{(0)}$ est non nul et le calcul matriciel par bloc montre que $BX = \delta X$ donc δ est une valeur propre de B.
Nous avons donc montré que $Sp(B) = \{\delta \in \mathbb{C} \text{ tel que } \delta^2 \in Sp(A)\}$.

2. <u>A diagonalisable $\Rightarrow$ B diagonalisable</u> :
<u>Supposons que A soit diagonalisable</u> et que le spectre de A soit formé des complexes $\lambda_1, .., \lambda_r$ deux à deux distincts. Le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de A à racines simples.
En effet, si e_j est un vecteur propre associé à λ_j, on a
$$P(A)e_i = \left[\prod_{i=1}^{r} (A - \lambda_i I)\right] e_i = \left[\prod_{i \neq j} (A - \lambda_i I)\right] (A - \lambda_j I)\, e_j = \left[\prod_{i \neq j} (A - \lambda_i I)\right] 0_{\mathbb{C}^n} = 0_{\mathbb{C}^n}$$
et comme tout vecteur de $\mathbb{C}^n$ est une combinaison linéaire des vecteurs e_i, on en déduit que $P(A)X = 0$ pour tout vecteur $X \in \mathbb{C}^n$, ce qui montre que $P(A) = 0$.
Ensuite, un calcul direct nous donne $B^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ donc
$$P(B^2) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{C})}$$
ce qui montre que $P(X^2)$ est un polynôme annulateur de B. Il reste alors à montrer que le polynôme $P(X^2)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ pour montrer que B est diagonalisable. Pour cela, considérons pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, un complexe δ_i vérifiant $\delta_i^2 = \lambda_i$. Il est immédiat que
$$P(X^2) = \prod_{i=1}^{r} \left(X^2 - \lambda_i\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(X^2 - \delta_i^2\right) = \prod_{i=1}^{r} (X - \delta_i)(X + \delta_i) = \prod_{\substack{ii \in [\![1,r]\!] \\ \varepsilon \in \{-1,1\}}} (X - \varepsilon\delta_i)$$
Puisque A est inversible, toutes ses valeurs propres λ_i sont non nulles donc tous les complexes δ_i sont non nuls. Soient $\varepsilon\delta_i$ et $\varepsilon'\delta_j$ deux racines de $P(X^2)$ telles que $\varepsilon\delta_i = \varepsilon'\delta_j$ (existence d'une racine au moins double) alors en élevant au carré, on a $\lambda_i = \lambda_j$ donc $i = j$ (puisque les λ_k sont deux à deux distincts lorsque les indices diffèrent), ce qui entraine que $\varepsilon = \varepsilon'$ (puisque δ_i est un complexe non nul). Nous avons ainsi montré que $\varepsilon\delta_i = \varepsilon'\delta_j$ si et seulement si $\varepsilon = \varepsilon'$ et $i = j$.
Ainsi, le polynôme $P(X^2)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ tout en étant un polynôme annulateur de B, ce qui montre que B est diagonalisable.
<u>B diagonalisable $\Rightarrow$ A diagonalisable</u> :
Réciproquement, si B est diagonalisable alors B^2 est également diagonalisable et si on note $\delta_1, .., \delta_r$ les valeurs propres distinctes de B^2, le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \delta_i)$ est un polynôme annulateur pour B^2. Les égalités $P(B^2) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$ et $P(B^2) = 0$ implique que $P(A) = 0$ donc P est un polynôme annulateur scindé à racines simples de A ce qui montre que A est diagonalisable.

3. Le résultat est clairement faux si A n'est plus inversible. Il suffit pour cela de considérer $n = 1$ et $A = 0$. La matrice nulle est bien diagonalisable mais $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nilpotente qui n'est pas diagonalisable (si elle l'était,

puisque son unique valeur propre est 0 est serait semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc elle serait nulle, ce qui n'est pas le cas).

Correction de l'exercice 1.2 :

1. La matrice X admet le polynôme $P(Y) = Y^3 - 2Y^2 + 1$ comme polynôme annulateur. Ce polynôme admet 1 comme racine évidente et en effectuant la division euclidienne de P par $Y - 1$, on obtient la factorisation suivante $P(Y) = (Y - 1)(Y^2 - Y - 1)$. Le dernier facteur étant un trinôme dont les racines sont $y_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, on en déduit que le polynôme $P(Y)$ est annulateur de X et il est, en outre, scindé sur $\mathbb{R}$ (i.e. admet toutes ses racines sur $\mathbb{R}$) à racines simples donc X est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, il existe trois entiers p, q, r tels que $p + q + r = n$ ainsi qu'une matrice P inversible telle que
$$X = P \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & y_+ I_q & 0 \\ 0 & 0 & y_- I_r \end{pmatrix} P^{-1}$$
(p désigne la multiplicité géométrique de 1, c'est-à-dire la dimension de l'espace propre associé à 1, q la multiplicité géométrique de y_+ et r la multiplicité géométrique de y_-).
Réciproquement, si X est de la forme $X = P \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & y_+ I_q & 0 \\ 0 & 0 & y_- I_r \end{pmatrix} P^{-1}$, un calcul direct montre que $X^3 - 2X^2 + I_n = 0$ (puisque $X^k = P \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & (y_+)^k I_q & 0 \\ 0 & 0 & (y_-)^k I_r \end{pmatrix} P^{-1}$

2. (a) Si l'on voit X comme une matrice à coefficients réels, la question 1 nous donne la réduction de X ce qui montre immédiatement que
$$\mathrm{tr}(X) = p + q y_+ + r y_- \quad \text{et} \quad \det(X) = (y_+)^q (y_-)^r$$
(remarquons que p, q, r sont des entiers naturels). D'autre part, puisque X est à coefficients rationnels, sa trace et son déterminant sont aussi à coefficients rationnels. Or l'égalité
$$\mathrm{tr}(X) = p + q y_+ + r y_- = \frac{2p + q + r}{2} + \frac{q - r}{2}\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{q - r}{2}\sqrt{5} = \mathrm{tr}(X) - \frac{2p + q + r}{2}$$
implique que $\dfrac{q - r}{2}\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$. Si $q - r \neq 0 \Leftrightarrow q \neq r$ alors on peut diviser par $\dfrac{q - r}{2}$ et le réel $\sqrt{5}$ est rationnel, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, $q = r$ et l'on a :
$$\mathrm{tr}(X) = \frac{2p + 2q}{2} = p + q \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \det(X) = (y_+)^q (y_-)^q = (y_+ y_-)^q = (-1)^q \in \{-1, 1\}$$
puisque le produit des racines du trinôme $Y^2 - Y - 1$ est égal à son coefficient constant.

   (b) Résolution lorsque $n = 2$: Nous savons que les entiers naturels p, q, r vérifie les relations $p + q + r = 2$ (par définition de p, q, r) et que $q = r$ (d'après la question 2.a)) donc $p + 2q = 2$. Par conséquent, soit $q = 0$ et $p = 2$, soit $q = 1$ et $p = 0$ (si $q \neq 0$ alors $q \geqslant 1$ donc $2 = p + 2q \geqslant p + 2 \Rightarrow 0 \geqslant p$ et p est un entier naturel).
Premier cas $p = 2$ et $q = 0$: Alors la matrice X, qui est de taille 2, admet la valeur propre $1 \in \mathbb{Q}$ dont la multiplicité est 2, qui est la taille de la matrice X. Par conséquent, la matrice X est diagonalisable et il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{Q})$ telle que $X = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P I_2 P^{-1} = I_2$. Réciproquement, il est immédiat que la matrice I_2 vérifie bien l'équation $X^3 - 2X^2 + I_2 = 0$
Deuxième cas $p = 0$ et $q = 1$: Dans ce cas, 1 n'est pas valeur propre de X donc la matrice $X - I_2$ est inversible et l'égalité
$$0 = X^3 - 2X^2 + I_2 = (X - I_2)(X^2 - X - I_2)$$
implique que $X^2 - X - I_2 = 0$. Soit e un vecteur de $\mathbb{Q}^2$ non nul, montrons que la famille (e, Xe) est une base de $\mathbb{Q}^2$ ou, ce qui revient au même, que la famille (e, Xe) est une famille libre. Si ce n'est pas le cas, étant donné que e est un vecteur non nul, le vecteur Xe est colinéaire au vecteur e donc il existe un rationnel λ tel que $Xe = \lambda e$. Il est alors immédiat que
$$X^2 e = X(Xe) = X(\lambda e) = \lambda X e = \lambda^2 e \Rightarrow (X^2 - X - I_2)e = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - \lambda - 1)\underbrace{e}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Ainsi le rationnel λ est solution de l'équation de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ dont les seules racines, dans $\mathbb{R}$, sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ dont aucune n'est rationnel. Par conséquent, la famille (e, Xe) est libre dans $\mathbb{Q}^2$ donc c'est une base de $\mathbb{Q}^2$.
Pour une meilleure compréhension, note $e_1 = e$ et $e_2 = Xe$ alors on a

$$Xe_1 = Xe = e_2 \quad \text{et} \quad Xe_2 = X(Xe) = X^2 e = Xe + e = e_2 + e_1$$

Si l'on désigne par P la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{Q}^2$ à la base (e_1, e_2), on a

$$X = P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Réciproquement, si $P \in GL_2(\mathbb{Q})$ alors je laisse le soin au lecteur de vérifier que $X^2 - X - I_2 = 0$ donc $(X - I_2)(X^2 - X - I_2) = 0$, c'est-à-dire que $X^3 - 2X^2 + I_2 = 0$.
Conclusion : Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble

$$\left\{ P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P \in GL_2(\mathbb{Q}) \right\} \cup \{I_2\}$$

Résolution lorsque $n = 3$: Comme précédemment, on dispose de l'égalité $p + 2q = 3$ donc p est nécessairement impair, ce qui implique que $p = 1$ (donc $q = 1$) ou $p = 3$ (donc $q = 0$)
Premier cas $p = 3$ et $q = 0$: comme dans le cas $n = 2$, on en déduit que $X = I_3$ est la seule et unique solution de l'équation (E).
Deuxième cas $p = 1$ et $q = 1$: Puisque $P(Y) = Y^3 - 2Y^2 + 1$ est un polynôme annulateur de X et que l'on dispose de la factorisation suivante $P(Y) = (Y - 1)(Y^2 - Y - 1)$ en produit d'irréductibles sur $\mathbb{Q}[Y]$, le théorème des noyaux nous donne

$$\mathbb{Q}^3 = \ker(X - I_3) \oplus \ker(X^2 - X - I_3).$$

Etant donné que $p = \dim(X - I_3) = 1$, on en déduit que $\dim \ker(X^2 - X - I_3) = 2$. On fixe une base (e_1) de $\ker(X - I_3)$. Soit e_2 un vecteur non nul de $\ker(X^2 - X - I_3)$, alors en utilisant le raisonnement du cas $n = 2$, $q = 1$, on montre que la famille (e_2, Xe_2) est une famille libre de $\ker(X^2 - X - I_3)$ (par définition $(X^2 - X - I_3)e_2 = 0$ et le fait que $Xe_2 \in \ker(X^2 - X - I_3)$ est laissé au lecteur). L'espace $\ker(X^2 - X - I_3)$ étant de dimension 2, il est immédiat que (e_2, Xe_2) est une base de $\ker(X^2 - X - I_3)$. Si l'on note $e_3 = Xe_2$, la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{Q}^3$ (par regroupement de bases de sous-espaces en somme directe) et l'on a :

$$Xe_1 = e_1, \quad Xe_2 = e_3 \quad Xe_3 = e_3 + e_2$$

En introduisant la matrice de changement de base de la base canonique dans la base (e_1, e_2, e_3), on a

$$X = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

et je laisse le lecteur vérifier que pour toute matrice $P \in GL_3(\mathbb{Q})$, la matrice $X = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ est solution de l'équation $X^3 - 2X^2 + I_3 = 0$.
Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble

$$\left\{ P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P \in GL_2(\mathbb{Q}) \right\} \cup \{I_3\}$$

Correction de l'exercice 1.3 :

1. Si A est inversible alors $B = A^{-1}0 = 0$ et tout vecteur propre de A est vecteur propre de B (pour la valeur propre 0). De même si B est inversible alors $A = 0$ et tout vecteur propre de B est vecteur propre de A.
   Si A et B ne sont pas inversibles, soit l'une d'entre elle est nulle et on utilise l'argument précédent, soit elles sont toutes les deux non nulles, c'est ce que nous supposons dorénavant.
   La matrice B admet des valeurs propres $\lambda \in \mathbb{C}$.
   Premier cas : Si l'une de ces valeurs propres λ est non nulle, note X un vecteur propre associé, on a

$$\left.\begin{array}{r} ABX = (AB)X = 0X = 0 \\ A(BX) = A(\lambda X) = \lambda AX \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\lambda}_{\neq 0} AX = 0 \Rightarrow AX = 0 \Leftrightarrow AX = 0X$$

donc X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0, ce qui implique que A et B ont le vecteur X comme vecteur propre commun.
Deuxième cas : Si toutes les valeurs propres de B sont nulles alors B est nilpotente (par trigonalisation). Considérons a et b les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ dont les matrices respectives dans la base canonique sont A et B. L'endomorphisme b est non nul donc $\operatorname{Im} b \neq \{0\}$ et il est stable par b (si $y = b(x)$ alors $b(y) \in \operatorname{Im} b$!!). L'application $b_{|\operatorname{Im}(b)}$ est un endomorphisme qui admet nécessairement un vecteur propre x, c'est-à-dire que $b(x) = 0$ (puisque les valeurs propres de $b_{|\operatorname{Im}(b)}$ sont parmi les valeurs propres de b) et il existe $y \in \mathbb{C}^n$ tel que $x = b(y)$. Par construction, on a $b(x) = 0.x$ et $a(x) = a(b(y)) = (ab)(y) = 0$ donc x est à la fois un vecteur propre pour a et pour b. En repassant aux matrices, on a l'existence d'un vecteur propre X commun à A et à B.

2. On procède par récurrence sur n en posant
$(\mathcal{P}_n)$: si $AB = 0$ alors il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont triangulaire supérieure "
Initialisation : si $n = 1$ alors A et B sont deux matrices 1×1 donc elles sont trivialement triangulaires.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vrai et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$. La question 1 montre l'existence d'un vecteur propre e_1 commun aux deux matrices A et B. Si l'on complète la famille (e_1) en une base $(e_1, .., e_{n+1})$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ et si l'on note P la matrice de changement de base de la base canonique dans la base $(e_1, .., e_{n+1})$, on a

$$A = P \begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad B = P \begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & B' \end{pmatrix} P^{-1}$$

L'égalité $AB = 0$ s'écrit alors

$$P \begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & B' \end{pmatrix} P^{-1} = 0 \Leftrightarrow P \begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & B' \end{pmatrix} P^{-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & B' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 b_1 & * \\ 0 & A'B' \end{pmatrix} = 0$$

donc les matrices A' et B', qui sont de taille n, vérifient $A'B' = 0$. On peut alors appliquer l'hypothèse $(\mathcal{P}_n)$ à A' et B' donc il existe une matrice P' telle que $A' = PA''P^{-1}$ et $B' = PB''P^{-1}$, où A'' et B'' sont des matrices triangulaires supérieures. Un calcul immédiat par bloc, en se rappelant que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (P')^{-1} \end{pmatrix}$, montre que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & A'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}^{-1} P^{-1} \quad \text{et} \quad B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & B'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}^{-1} P^{-1}.$$

La matrice $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$ est inversible, les deux matrices $T_A = \begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ et $T_B = \begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & B'' \end{pmatrix}$ sont triangulaires supérieures et l'on a bien $A = QT_AQ^{-1}$ et $B = QT_BQ^{-1}$ donc A et B sont co-trigonalisable, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.