1 Exercices

Exercice 1.1 Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et (E_n) l'équation $M^2 - (\operatorname{tr} M)M + \det(M)I_n = 0$
Résoudre (E_2), (E_3), puis (E_n).

Exercice 1.2 Déterminer les $P \in \mathbb{R}_4[X]$ unitaires tels que $\int\limits_{-1}^{1} (P(t))^2 dt$ soit minimal

Exercice 1.3 Soit E un espace vectoriel réel euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de u^*u, puis $s_1, s_2, ..., s_n$ les racines carrées de ces valeurs propres.
On note $(e_1, e_2, .., e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u^*u.

1. Montrer l'existence d'une base orthonormale $(f_1, f_2, .., f_n)$ de E telle que $u(e_i) = s_i f_i$ pour tout i.
2. Montrer qu'il existe un endomorphisme h auto-adjoint positif et un endomorphisme orthogonal w tels que $u = hw$.
3. Montrer que le rang de h est le nombre de valeur propre de u^*u comptées avec leurs ordres de multiplicité.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Pour $n = 2$, le polynôme caractéristique d'une matrice M quelconque est le polynôme $X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M)$
Pour $n = 3$, la matrice M possède un polynôme annulateur du second degré. Si ce polynôme admet deux racines réelles distinctes, M est diagonalisable et on diagonalise X puis on réinjecte dans l'équation. Si ce polynôme n'admet pas de racines réelles, alors le polynôme peut s'écrire $(X + a)^2 + b^2$. Dans ce cas, montrer que si e est un vecteur non nul, alors (e, Xe) est libre et écrire la matrice de l'endomorphisme associé à X dans la base (e, Xe) puis réinjecter dans l'équation. S'il y a une racine double, montrer que X est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et réinjecter dans l'équation.
Lorsque n est quelconque, si le polynôme $X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M)$ admet deux racines réelles distinctes, faire comme dans le cas $n = 3$, s'il admet une seule racine réelle r, écrire M sous la forme $rI_n + N$, où N est une matrice nilpotente d'ordre 2 ($\mathrm{tr}(N) = 0$ et $\det(rI_n + N) = \cdots$) et réinjecter dans l'équation. Si le polynôme admet deux racines distinctes non réelles, il s'écrit $(X + a)^2 + b^2$, montrer que la dimension est nécessairement paire (considérer $\det(M + a)^2$). Choisir un vecteur e_1 non nul, montrer que l'espace $\mathrm{Vect}(e_1, Xe_1)$ est de dimension 2, choisir alors un vecteur $e_2 \notin \mathrm{Vect}(e_1, Xe_1)$ et montrer que $\mathrm{Vect}(e_1, Xe_1, e_2, Xe_2)$ est de dimension 4, choisir alors un vecteur $e_3 \notin \mathrm{Vect}(e_1, Xe_1, e_2, Xe_2)$, ... En déduire que X est semblable à une matrice diagonale par bloc dont chaque bloc diagonal est de la forme de ceux obtenus pour $n = 2$

Indication pour l'exercice 1.2 : C'est un problème de moindre carré ($E = \mathbb{R}_4[X]$, $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, $F = \mathbb{R}_2[X]$, $x_0 = X^4$ et $\inf_{P \in S} \int_0^1 (P(t))^2 dt = (d(x_0, F))^2$

Indication pour l'exercice 1.3 :
Soit E un espace vectoriel réel euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de u^*u, puis $s_1, s_2, ..., s_n$ les racines carrées de ces valeurs propres.
On note $(e_1, e_2, .., e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u^*u.

1. Vérifier que la famille $(f_i = \frac{1}{s_i} u(e_i),\quad i$ tel que $s_i \neq 0\}$ est une famille orthonormale et choisir une base orthonormale de $\ker u$
2. Considérer l'endomorphisme w définie par $w(e_i) = f_i$ et l'endomorphisme h défini par $h(f_i) = s_i f_i$
3. Puisque w est inversible, le rang de u est celui de h

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 :
Indisponible actuellement (mais cela va venir)