1 Exercices

Exercice 1.1 On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et bornées.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit N_p, application de E dans $\mathbb{R}$: $N_p(f) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left| t^p e^{-|t|} f(t) \right|$.
   Montrer que N_p est une norme.
3. Soit φ_c, application de E dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi_c(f) = f(c)$.
   L'application φ_c est-elle continue relation à N_p ?
4. Soient p et q deux entiers naturels distincts. Montrer que N_p et N_q ne sont pas équivalentes.

Exercice 1.2 Soit E l'espace vectoriel des suites réelles u telles que la suite (S_n), avec $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} |u_p|$ soit bornée. On pose $\|u\| = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

1. Montrer que $\|.\|$ munit E d'une structure d'espace vectoriel normé
2. Soit $v \in E$, on considère l'application

$$T_v : u \in E \mapsto u * v, \quad \text{avec} \quad \forall n \geqslant 0, \quad (u*v)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

   (a) Montrer que T_v est un endomorphisme continu sur $(E, \|\|)$.
   (b) Calculer sa norme $|||T_v|||$
   (c) Que peut-on dire de l'application $v \mapsto T_v$?

Exercice 1.3 Soit φ une application continue bijective strictement croissante de $[0,1]$ sur $[0,1]$. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $T(f) : x \mapsto \int\limits_0^1 \min(x, \varphi(t)) f(t) dt$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Montrer que T est continu pour la norme uniforme.
3. Calculer $|||T|||$ lorsque $\varphi = \mathrm{Id}_{[0,1]}$ puis dans le cas général

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. RAS
2. La seule difficulté est de penser à justifier l'existence de $N_p(f)$, c'est-à-dire justifier l'existence de $\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|t^p e^{-|t|} f(t)\right|$. Pour cela, il suffit simplement de montrer que $t \mapsto t^p e^{-t}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (et utiliser la parité)
3. Justifier que la fonction $t \mapsto t^p e^{-|t|} f(t)$ atteint sa borne sup (la fonction tend vers 0 à l'infini, donc le sup s'effectue sur un segment suffisamment grand). En comparant la fonction $t^p e^{-|t|} f(t)$ en ce maximum et en c, on obtient la continuité de φ_c.
4. Tester sur des fonctions $t \mapsto t^n e^{-|t|}$ en calculant explicitement le sup puis faire tendre n vers l'infini.

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Pas de difficulté particulière, cela résulte essentiellement du fait que la suite $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k + v_k|$ est croissante et qu'elle est majorée par $\sum\limits_{k=0}^{n} |u_k| + \sum\limits_{k=0}^{n} |v_k|$ et cette dernière suite est majorée
2. (a) Il faut majorer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \left|\sum\limits_{p=0}^{k} u_p v_{k-p}\right|$ et, pour cela, on majore par l'inégalité triangulaire et on utilise Fubini pour permuter les symboles de sommation. On en déduit une majoration de cette somme par $\|u\| \times \|v\|$ et on conclut
   (b) On a une première majoration découlant de la question précédente, puis pour la minoration, on évalue explictement $T_v(u)$, où u est une suite nulle à partir d'un certain rang (une très simple convient !)
   (c) Est-elle linéaire ? Conserve-t-elle la norme ? donc c'est une ...... Peut-on décrire son image (est-elle surjective en particulier ?)

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Il faut non seulement montrer la linéarité, ce qui est évident, mais SURTOUT montrer que T est un endomorphisme (!!!), c'est-à-dire montrer que $T(f)$ appartient à E.
   L'arme atomique : le théorème de Lebesgue pour les intégrales à paramètre.
   La méthode douce : découper l'intégrale en 2 intégrales, et utiliser que l'application $x \mapsto \int\limits_a^x g(t)dt$ est C^1 lorsque g est continue (théorème fondamental de l'analyse). On n'oublie pas que $\varphi(t) = x \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(x)$ (oh la belle formule qui est valide car φ est .....)
2. Inégalité triangulaire pour l'intégrale.
3. Pour $\varphi = \mathrm{Id}_{[0,1]}$, on regarde à quel moment dans les majorations de la question précédente (celle découlant de la méthode douve :=)), on peut avoir des égalités, dans le doute, on revoit le cours de sup pour savoir à quel moment on a l'égalité $\left|\int\limits_0^1 g(t)dt\right| = \int\limits_0^1 |g(t)|\, dt)$ et on considère la fonction qui le permet. On obtient alors une minoration de la norme subordonnée.
   Pour φ quelconque, on procède de façon similaire en remarquant que $\varphi(t) = x \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(x)$

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :
Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)