1 Exercices

Exercice 1.1 1. Soit $x \in [0,1]$. On considère la suite de réels u_n définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(x - (u_n))^2)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge et expliciter sa limite $u(x)$.

2. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(x) = u_n(x) + \frac{1}{2}(x - (u_n(x))^2)$$

(a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ appartient à $C([0,1],\mathbb{R})$

(b) Soit $0 < a \leqslant 1$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers u sur $C([a,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a,1]} |f(x)|$

(c) Montrer qu'en fait la suite $(u_n)_n$ converge vers u sur $C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$

Exercice 1.2 On considère la suite u définie par $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{3} - u_n + 3$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$

1. On suppose que $u_0 \in [0,3]$.

   (a) Montrer que si $u_0 \in [0,3]$, la suite u converge vers une limite L à expliciter.

   (b) Donner un équivalent de $L - u_n$ lorsque $n \to +\infty$.

2. On suppose $u_0 > 3$

   (a) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

   (b) Donner un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$

Exercice 1.3 On considère la suite u définie par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}_+$

1. Montrer que la suite u converge et expliciter sa limite L.
2. Donner un équivalent de $u_n - L$.

Exercice 1.4 Soit une suite (a_n) telle que $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ et pour tout $n > 0$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2a_{n-1}}{n+1}$.

1. Déterminer la limite de la suite (a_n).
2. Montrer que $a_n = O(n^2)$.
3. Existence de la limite de la suite $(\dfrac{a_n}{n^2})$.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Commencer par montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{x}$ (si l'application des règles usuelles sur les inégalités ne convient pas, on n'oublie pas que comparer a et b revient à étudier le signe de $a-b$).
   En déduire la monotonie de la suite.

2. (a) récurrons, récurrons
   (b) Montrer que $0 \leqslant \sqrt{x} - u_{n+1}(x) \leqslant (1 - \frac{\sqrt{a}}{2})(\sqrt{x} - u_n(x))$
   (c) Utiliser que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \sqrt{x} - u_n(x) \leqslant \sqrt{x}$ et la continuité de $\sqrt{x}$ en 0 pour obtenir une majoration de $\sqrt{x} - u_n(x)$ au voisinage de 0 puis utiliser la convergence sur $[\alpha, 1]$.

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in [0,3]$ puis invoquer le théorème de convergence monotone.
   (b) Introduire la suite $v_n = L - u_n$ (donc $v_n \geqslant 0$) et expliciter la relation de récurence satisfaite par v. Montrer ensuite qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{(u_{n+1})^\alpha} - \frac{1}{(u_n)^\alpha}$ admet une limite puis utiliser, soit Césaro, soit les restes partielles de série divergente.

2. On suppose $u_0 > 3$
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n > 3$, puis en procédant par l'absurde et en invoquant le théorème de monotonie, aboutir à une contradiction.
   (b) Intuitivement $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(u_n)^2}{3}$ mais cet équivalent est inexploitable directement. Utiliser alors la suite $(\ln u_n)_n$ et montrer que $\ln u_{n+1} = 2 \ln u_n - 3 + o(1)$, la suite $(\ln u_n)_n$ est donc "presque" arithmético-géométrique et intuitivement son ordre de grandeur est en 2^n. Pour le justifier correctement, montrer que la suite $(\frac{\ln u_n}{2^n})$ est convergente (on utilisera la série associée à l'étude des suites) et en déduire un équivalent de u_n (attention, pour que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$, il faut et il suffit que $u_n = v_n + o(1)$)

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Si $u_0 \in [0,2]$, montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in [0,2]$ et si $u_0 > 2$ alors $\forall n \geqslant 0, \quad u_n > 2$. Etudier ensuite la monotonie de la suite (ne pas hésitez à introduire les fonctions auxiliaires nécessaires) et conclure.

2. Ecrire $u_n = L + v_n$ avec $v_n = o(1)$, réinjecter dans la relation de récurrence satisfaite par u et en déduire que $\frac{v_{n+1}}{v_n} \to \frac{1}{4}$.
   Intuitivement, v_n est "asymptotiquement" géométrique mais on ne peut effectuer de produit d'équivalent d'un nombre arbitrairement grand d'équivalents. Justifier alors que la suite $(4^n v_n)$ est convergente dans $\mathbb{R}$ (passer au ln, utiliser la série correspondante et l'égalité précédente)

Indication pour l'exercice 1.4 :

1. Etudier la monotonie de la suite. Supposer qu'elle est majorée, en déduire que la série $\sum_n a_{n+1} - a_n$ est divergente et conclure.

2. Justifier que $a_{n+1} \leqslant a_n(1 + \frac{2}{n+1})$ et en déduire une majoration simple de a_n

3. Montrer que la suite $(\frac{a_n}{n^2})$ est monotone.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 :

1. (a) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{3} - x + 3$ possède comme intervalle stable $I_1 = [0, 3]$ (i.e. $f(I_1) \subset I_1$, ce que l'on démontre par un tableau de variations de f). Ensuite, si $u_0 \in I_1$, par récurrence, on montre que $u_n \in I_1$ (pour l'hérédité, $u_n \in I_1$ alors $f(u_n) \in I_1$, par stabilité, donc $u_{n+1} = f(u_n) \in I_1$).
La fonction $f(x)-x$ est toujours positive sur $\mathbb{R}$ (c'est un trinôme de discriminant nul et dont le coefficient dominant $\dfrac{1}{3}$ est positif). Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant x$ et en évaluant en $x = u_n \in \mathbb{R}$, on obtient que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0$ donc la suite u est croissante.
La suite u est croissante et majorée par 3 donc elle converge vers une limite $L \in [0, 3]$. Puisque f est continue sur $[0, 3]$, on a $L = f(L)$ (passer à la limite dans la relation de récurrence satisfaite par u). Cette équation est une équation du second degré qui n'admet comme unique solution 3 donc la suite u converge vers 3.

   (b) Remarque : si $u_0 = 3$ alors la suite u est constante égale à 3 donc $\forall n \geqslant 0, \quad u_n - 3 = 0$
Si $u_0 < 3$ alors $\forall n \geqslant 0, \quad u_n < 3$. On introduit la suite v définie par $\forall n \geqslant 0, \quad v_n = 3 - u_n$ (pour que v soit toujours positive) Alors

$$v_{n+1} = 3 - u_{n+1} = 3 - \left(\frac{u_n^2}{3} - u_n + 3\right) = u_n - \frac{u_n^2}{3} = (3 - v_n) - \frac{(3 - v_n)^2}{3} = v_n - \frac{v_n^2}{3}$$

Puisque $v_n \to 0$ et que la fonction $x \mapsto x - \dfrac{x^2}{3}$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ de la forme $\alpha x + \beta x^p + o(x^p)$ avec $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et p un réel $p > 1$, cherchons un réel $a > 0$ tel que la suite $\dfrac{1}{(v_{n+1})^a} - \dfrac{1}{(v_n)^a}$ admette une limite finie non nulle :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(v_{n+1})^a} - \frac{1}{(v_n)^a} &= \frac{1}{\left[v_n - \frac{v_n^2}{3}\right]^a} - \frac{1}{(v_n)^a} = \frac{1}{(v_n)^a\left[1 - \frac{v_n}{3}\right]^a} - \frac{1}{(v_n)^a} = \frac{1}{(v_n)^a}\left[\frac{1}{(1 - \frac{v_n}{3})^a} - 1\right] \\
&= \frac{1}{(v_n)^a}\left[\frac{1}{(1 - \frac{v_n}{3})^a} - 1\right] = \frac{1}{(v_n)^a}\left[1 + a\frac{v_n}{3} + o(v_n) - 1\right] = \frac{1}{(v_n)^a}\left[a\frac{v_n}{3} + o(v_n)\right] \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{3} \times (v_n)^{a-1}
\end{aligned}$$

Donc la suite $\dfrac{1}{(v_{n+1})^a} - \dfrac{1}{(v_n)^a}$ admet une limite finie non nulle ssi $a = 1$ et, dans ce cas,

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{3}$$

Première méthode : Par Césaro, on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{1}{3} + o(1) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{v_n} = \frac{n}{3} + \frac{1}{v_0} + o(n) = \frac{n}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3} \Leftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}
\end{aligned}$$

Deuxième méthode : Par sommation des séries divergentes.
Puisque $\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3}$, la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$ est grossièrement divergente et le théorème de sommation des séries divergentes nous montre que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{k+1}} - v_k\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{3} + o(n) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{3} + o(n) \Leftrightarrow \frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3} \Leftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient l'équivalent souhaité

$$3 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}$$

2. (a) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{3} - x + 3$ possède comme intervalle stable $I_2 =]3, +\infty[$ (i.e. $f(I_2) \subset I_2$, ce que l'on démontre par un tableau de variations de f). Ensuite, si $u_0 \in I_2$, par récurrence, on montre que $u_n \in I_2$ (pour l'hérédité, $u_n \in I$ alors $f(u_n) \in I_2$, par stabilité, donc $u_{n+1} = f(u_n) \in I_2$).
La fonction $f(x) - x$ est toujours positive sur $\mathbb{R}$ (c'est un trinôme de discriminant nul et dont le coefficient dominant $\dfrac{1}{3}$ est positif). Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant x$ et en évaluant en $x = u_n \in \mathbb{R}$, on obtient que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0$ donc la suite u est croissante.
Supposons que la suite u soit majorée. Dans ce cas, elle est croissante et majorée donc elle est convergente et sa limite L satisfait l'égalité
$$L = \frac{L^2}{3} - L + 3 \Leftrightarrow \frac{L^2}{3} - 2L + 3 = 0 \Leftrightarrow L = 3$$
Or la suite u est croissante, donc $\forall n \geqslant 0$, $u_n \geqslant u_0$ et en passant à la limite, on a $L \geqslant u_0$. Or on sait que $u_0 > 3$ donc $L > 3$, ce qui est absurde donc la suite u n'est pas majorée. Puisqu'elle est croissante, cela implique qu'elle tend vers $+\infty$.
Remarque : nous n'avons pas utiliser que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n > 3$ car, par passage à la limite, on obtient seulement $L \geqslant 3$ ce qui ne fournit aucune contradiction. Nous devons utiliser une minoration plus fine, $u_n \geqslant u_0$ pour aboutir à la contradiction

(b) Nous savons que $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{3} - u_n + 3$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on en déduit facilement que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(u_n)^2}{3}$ (x^2 domine x et les constantes en $+\infty$). Malheureusement, on ne peut effectuer un nombre arbitrairement grand de substitution dans des équivalents.
Justification sur un exemple : Considérons la suite définie par
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = 2u_n \times \frac{n}{n+1}$$
On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 2$ donc $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2u_n$. Montrons que l'on a pas $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n u_0$. On considère pour cela la suite v définir par $v_n = \dfrac{u_n}{2^n}$. Je laisse le soin au lecteur de vérifier que $v_{n+1} = v_n \times \dfrac{n}{n+1}$ donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n}{n+1}$. En effectuant le produit de ces égalités de $n = 1$ à $N-1$, on obtient, après simplification $\dfrac{v_N}{v_1} = \dfrac{1}{N}$ donc $v_N = \dfrac{v_1}{N}$, ce qui implique que $u_N = \dfrac{2^N}{N} v_1$. Ainsi, on a $u_N = o(2^N)$ donc $u_N \underset{N\to+\infty}{\not\sim} 2^N u_0$
Pour contourner ce problème, on passe au logarithme et on factorise le terme dominant
$$\ln u_{n+1} = \ln(\frac{u_n^2}{3} - u_n + 3) = \ln\left(\frac{u_n^2}{3}\left[1 - \frac{3}{u_n} + \frac{9}{u_n^2}\right]\right) = \ln\left(\frac{u_n^2}{3}\right) + \ln\left[1 - \frac{3}{u_n} + \frac{9}{u_n^2}\right] = 2\ln u_n - \ln 3 + o(1)$$
puisque $\dfrac{3}{u_n} + \dfrac{9}{u_n^2} \to 0$. Asymptotiquement, la suite $\ln u_n$ est arithmético-géométrique de raison 2 donc, on a l'intuition (et non la preuve) que son ordre de grandeur asymptotique est en 2^n (revoir l'explicitation des suites arithmético-géométrique). Pour montrer cette intuition, il suffit de montrer que la suite $(\dfrac{\ln u_n}{2^n})_n$ converge dans $\mathbb{R}$, ce qui revient à démontrer que la série $\sum\limits_n \left[\dfrac{\ln u_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{\ln u_n}{2^n}\right]$ converge. On a :
$$\begin{aligned}\frac{\ln u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n}{2^n} &= \frac{2\ln u_n - \ln 3 + o(1)}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n}{2^n} = -\frac{\ln 3}{2^{n+1}} + o(\frac{1}{2^{n+1}}) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\ln u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln u_n}{2^n} \underset{\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln 3}{2^{n+1}} \qquad (E)\end{aligned}$$
L'équivalent précédent combinée aux faits que $-\dfrac{\ln 3}{2^{n+1}}$ est négatif pour tout n et que la série $\sum\limits_n -\dfrac{\ln 3}{2^{n+1}}$ est convergente implique que la série $\sum\limits_n \left[\dfrac{\ln u_{n+1}}{2^{n+1}} - \dfrac{\ln u_n}{2^n}\right]$ converge donc la suite $\dfrac{\ln u_n}{2^n}$ converge. Notons L sa limite, on a donc
$$\frac{\ln u_n}{2^n} \to L \Leftrightarrow \frac{\ln u_n}{2^n} = L + o(1) \Leftrightarrow \ln u_n = 2^n L + o(2^n)$$
Si l'on passe à l'exponentielle, on obtient que $u_n = \exp(2^n L)\exp(o(2^n))$. Par contre, on n'est pas assuré que $\exp(o(2^n))$ tende vers une limite finie K (ce qui démontrerait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K\exp(2^n L)$). Pour cela, il nous faut montrer que $o(2^n)$ tende vers une limite finie, ce qui à priori est loin d'être gagné !

En considérant l'équivalent (E) et en utilisant le théorème de sommation des restes de séries convergentes, on obtient

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\left[\frac{\ln u_{k+1}}{2^{k+1}}-\frac{\ln u_k}{2^k}\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} -\frac{\ln 3}{2^{k+1}} \Leftrightarrow L-\frac{\ln u_n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln 3}{2^n}$$

(puisque l'on a : $\sum\limits_{k=n}^{N}\left[\frac{\ln u_{k+1}}{2^{k+1}}-\frac{\ln u_k}{2^k}\right]=\frac{\ln u_{N+1}}{2^{N+1}}-\frac{\ln u_n}{2^n}$ et on fait tendre N vers $+\infty$) et on peut écrire

$$L-\frac{\ln u_n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln 3}{2^n}+o(\frac{1}{2^n}) \Leftrightarrow \frac{\ln u_n}{2^n}=L+\frac{\ln 3}{2^n}+o(\frac{1}{2^n}) \Leftrightarrow \ln u_n = 2^n L+\ln 3+o(1)$$
$$\Leftrightarrow u_n=\exp(2^nL+\ln 3+o(1))=3\exp(2^nL)\underbrace{\exp(o(1))}_{\to 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\exp(2^nL)$$

Nous avons ainsi déterminer l'équivalent de u_n. Remarquons que $L>0$ sinon la suite 2^nL est majorée par 0 donc la suite $3\exp(2^nL)$ est majorée par 3, ce qui interdit que la suite u_n tende vers $+\infty$. Puisque $L>0$, il existe $C>1$ tel que $L=\ln C$ et l'équivalent de u_n s'écrit

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\exp(2^n\ln C)=3\exp(\ln C^{2^n})=3C^{2^n} \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3C^{2^n} \qquad \text{avec } C>1$$

Correction de l'exercice 1.3 :

1. Pour commencer, une récurrence élémentaire montre que $\forall n\geqslant 0,\quad u_n\geqslant 0$. On introduit naturellement la fonction $f(x)=\sqrt{2+x}$ et remarquons que sa dérivée est majorée par $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ sur $\mathbb{R}_+$ (cela impliquera en particulier, que tout point fixe de f dans $\mathbb{R}_+$ sera attractif). Déterminons ses points fixes

$$f(x)=x\Leftrightarrow \sqrt{2+x}=x$$

Cette égalité implique que nécessaire x est positif (une racine carrée est toujours positive) donc on peut passer au carré

$$f(x)=x\Leftrightarrow 2+x=x^2\Leftrightarrow x\in\{-1,2\}$$

et comme $x\geqslant 0$, on obtient que $x=2$ est l'unique point fixe de f.
Montrons que la suite u converge vers 2. La preuve est classique et elle doit être connu (*c'est la preuve du célèbre théorème du point fixe, dont l'extension en dimension infinie permet la justification de l'existence et de l'unicité de nombres équations différentielles et équations aux dérivées partielles*)
Puisque $\forall x\geqslant 0,\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, l'inégalité des accroissements finis nous donne

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2,\qquad |f(x)-f(y)|\leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\,|x-y|$$

En choisissant $x=u_n\in\mathbb{R}_+$ et $y=2\in\mathbb{R}_+$ et en tenant compte que $f(u_n)=u_{n+1}$, nous obtenons

$$\forall n\geqslant 0,\qquad |u_{n+1}-2|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}\,|u_n-2|$$

Une récurrence simple montre que

$$\forall n\geqslant 0,\qquad |u_n-2|\leqslant\frac{1}{(2\sqrt{2})^n}\,|u_0-2|$$

(pour l'hérédité, il suffit de remarquer que

$$|u_{n+1}-2|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}\,|u_n-2|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{1}{(2\sqrt{2})^n}\,|u_0-2|=\frac{1}{(2\sqrt{2})^{n+1}}\,|u_0-2|)$$

La suite $\dfrac{1}{(2\sqrt{2})^n}\,|u_0-2|$ tend vers 0 donc la suite $(u_n)_n$ converge vers 2.

2. Intuitivement, le théorème des accroissements finis montre que

$$u_{n+1}-2=f(u_n)-f(2)=f'(c_n)(u_n-2).$$

Puisque $\forall n\geqslant 0,\quad u_n<c_n<2$ (ou $2<c_n<u_n$) et que la suite $(u_n)_n$ tend vers 2, la suite c_n tend vers 2 donc $f'(c_n)\underset{n\to+\infty}{\to}\dfrac{1}{4}$. Ainsi, asymptotiquement, on a $u_{n+1}-2\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{4}(u_n-2)$ (c'est-à-dire que la suite u_n-2 est "presque"

géométrique de raison 2) et on a bien envie de dire que $u_n - 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{4^n}$. Pour justifier cette équivalent, nous allons procéder comme à l'exercice précédent
Si l'on introduit la suite v définie par $v_n = u_n - 2$, on a : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{4}$. En particulier, il existe un rang N_0 tel que

$$\forall n \geqslant N_0, \qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} > 0$$

Ainsi, à partir de N_0, tous les termes de la suite v_n sont de même signe.
On suppose maintenant $v_n > 0$ à partir de ce rang. En passant au logarithme, on a

$$\ln v_{n+1} - \ln v_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\ln 4$$

En appliquant Césaro ou le théorème de sommation des sommes partielles de séries divergentes, on obtient

$$\ln v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\ln 4$$

En particulier, pour n assez grand, on a : $\ln v_n \leqslant -n\dfrac{\ln 4}{2} = -n\ln\sqrt{4} = -n\ln 2 = \ln(\dfrac{1}{2^n})$ (prendre la définition des équivalents avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$) donc $v_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ pour n assez grand, ce que l'on peut écrire $v_n = O(\dfrac{1}{2^n})$. En reprenant la relation de récurrence satisfaite par u_n et en utilisant que $v_n \to 0$ pour effectuer un DL_2, on obtient

$$v_n = -2 + \sqrt{4 + v_n} = 2(-1 + \sqrt{1 + \frac{v_n}{4}}) = \frac{1}{4}v_n - \frac{1}{64}v_n^2 + o(v_n^2)$$

en passant au logarithme, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\ln v_{n+1} &= \ln\left(\frac{1}{4}v_n - \frac{1}{64}v_n^2 + o(v_n^2)\right) = \ln\left(\frac{v_n}{4}\left[1 - \frac{1}{16}v_n + o(v_n)\right]\right) \\
&= \ln v_n - \ln 4 + \ln\left[1 - \frac{1}{16}v_n + o(v_n)\right] = \ln v_n - \ln 4 + o(v_n) \\
&= \ln v_n - \ln 4 + O(\frac{1}{2^n})
\end{aligned}$$

Si l'on introduit la suite w définie par : $\forall n \geqslant 0, \quad w_n = \ln v_n + n\ln 4$ ($\ln v_n$ moins son équivalent), on a :

$$w_{n+1} - (n+1)\ln 4 = w_n - n\ln 4 - \ln 4 + O(\frac{1}{2^n}) \Leftrightarrow w_{n+1} = w_n + O(\frac{1}{2^n})$$

Par conséquent, la série $\sum_n \dfrac{1}{2^n}$ étant absolument convergente, la série $\sum_n w_{n+1} - w_n$ est absolument convergente, donc convergente, ce qui implique que la suite w converge vers un réel K. On peut alors écrire

$$\ln v_n = -n\ln 4 + K + o(1) \Leftrightarrow v_n = \exp(-n\ln 4 + K + o(1)) = \frac{\exp(K)}{4^n}\underbrace{\exp(o(1))}_{\to 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\exp(K)}{4^n}$$

Par conséquent, il existe une constante $C = \exp(K) > 0$ telle que

$$u_n - 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{4^n}$$

Si la suite $u_n - 2$ est négative à partir d'un certain rang, on procède de la même façon avec la suite $v_n = 2 - u_n$ et on aboutit à l'existence d'une constante strictement négative C telle que $u_n - 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{4^n}$
Ainsi, dans tous les cas, il existe une constante réelle C non nulle telle que

$$u_n - 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{4^n}$$

Correction de l'exercice 1.4 : Soit une suite (a_n) telle que $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ et pour tout $n > 0$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2a_{n-1}}{n+1}$.

1. Une récurrence immédiate à deux termes (car la suite a vérifier une relation de récurrence à deux termes) montre que pour tout n, $a_n > 0$. On en déduit alors que la suite a est strictement croissante ($a_{n+1} - a_n = \dfrac{2a_{n-1}}{n+1} > 0$).
Supposons que la suite a soit majorée. Alors elle est croissante et majorée donc elle converge dans $\mathbb{R}$. Notons L sa limite (qui est strictement positive car $a_n \geqslant a_1$ donc $L \geqslant a_1 > 0$). La relation de récurrence montre alors que
$$a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2L}{n+1}$$
Cet équivalent combinée au fait que $\forall n \geqslant 0$, $\dfrac{2L}{n+1} \geqslant 0$ et que la série $\sum_n \dfrac{2L}{n+1}$ est divergente implique que la série $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$ diverge donc la suite (a_n) diverge ce qui est contradictoire. Par conséquent, la suite a n'est pas majorée et comme elle est croissante, on en déduit qu'elle tend vers $+\infty$.

2. La suite a est croissante donc $a_{n-1} \leqslant a_n$ et en utilisant la relation de récurrence satisfaite par a, on en déduit que
$$a_{n+1} \leqslant a_n + \frac{2a_n}{n+1} = (1 + \frac{2}{n+1})a_n \underset{(a_n>0)}{\Leftrightarrow} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant (1 + \frac{2}{n+1})$$
En multipliant ces inégalités pour $n = 1$ à $N - 1$ et en simplifiant le produit, on obtient
$$\forall N \geqslant 1, \qquad \frac{a_N}{a_1} \leqslant \prod_{n=1}^{N-1} (1 + \frac{2}{n+1}) = \prod_{n=1}^{N-1} (\frac{n+3}{n+1}) = \frac{\prod_{n=1}^{N-1} (n+3)}{\prod_{n=1}^{N-1} (n+1)}$$
En effectuant le changement de variable $j = n + 2$ dans le produit du numérateur, on peut écrire
$$\forall N \geqslant 1, \qquad \frac{a_N}{a_1} \leqslant \frac{\prod_{j=3}^{N+1} (j+1)}{\prod_{n=1}^{N-1} (n+1)} = \frac{(N+2)(N+1)}{2\times 3} \Rightarrow a_N \leqslant \frac{(N+2)(N+1)}{2\times 3} a_1$$
et donc $a_N = O(N^2)$

3. La suite $(\dfrac{a_n}{n^2})$ est bornée (par définition des O) donc pour justifier la convergence, il suffit de montrer que cette suite est monotone.
$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{a_n}{n^2} \leqslant \frac{a_n}{(n+1)^2}(1 + \frac{2}{n+1}) - \frac{a_n}{n^2} = -\frac{(3n+1)a_n}{n^2(n+1)^2} < 0$$
donc la suite $(\dfrac{a_n}{n^2})$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.