1 Exercices

Exercice 1.1 Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$.

1. Domaine de définition, continuité ?
2. Dérivabilité ?
3. Calculer f' et en déduire f.

Exercice 1.2 Soient $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a,b], \quad f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt.$$

Etudier la convergence de $\sum_n f_n$ et calculer sa somme.

Exercice 1.3 On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$, continue, dérivable.
2. Déterminer un équivalent de f en 0.
3. Montrer que $f'(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.
4. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Se ramener à déterminer le domaine de convergence de $\sum_n \frac{a^n}{n^2}$ où a est réel. Se rappeler les règles de domination entre les suites géométriques et les suites puissances n^α pour obtenir les cas de divergence grossière. Dans les autres cas, une majoration par une série simple fournit le résultat. Traduire les conditions sur a en conditions sur $1-x$ et $\frac{x-1}{x}$. Pour la continuité, cela résulte des théorèmes sur la continuité de sommes de fonctions continues.

2. Pour la dérivabilité, justifier la dérivabilité sur $[a,b] \subset]\frac{1}{2}, 2[$ par les théorèmes généraux puis sur $]\frac{1}{2}, 2[$.

3. Dériver terme à terme (à l'aide du 2) et utiliser que $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{a^n}{n}\right) = \ln(1-a)$ lorsque $a \in [0,1[$ pour obtenir une formule expliciter de f' (i.e. sans symbole $\sum$). Pour en déduire f, une intégration par partie bien sentie convient.

Indication pour l'exercice 1.2 : Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 0, \quad \forall x \in [a,b], \quad |f_n(x)| \leqslant \|f\|_\infty \frac{(x-a)^n}{n!}$ en déduire la convergence normale de la série. Vérifier ensuite que la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\int_a^x S(t)dt = S(x) - f_0(x)$$

On peut voir cette équation comme l'équation différentielle vérifier par $x \mapsto \int_a^x S(t)dt$ (donc la dérivée est ...), la résoudre par la variation de la constante (on connait la condition initiale $\int_a^a S(t)dt = ...$) puis en déduire $S(t)$ (qui sera une expression en $f_0(x) = f(x)$

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Cela résulte du théorème des séries alternées (pour la définition), de la majoration par le théorème des séries alternées (pour obtenir la convergence uniforme sur $[0,a]$) et des théorèmes sur la continuité et la dérivabilité d'une somme de fonctions continues (dérivables)

2. Intuitivement, $(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} (-1)^{n-1}\frac{x}{n}$ donc $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. Pour justifier cela proprement, écrire $f(x) - x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ sous la forme de la somme des différences, utilser ensuite l'inégalité triangulaire et la majoration simple $|\ln(1+x) - x| \leqslant \frac{x^2}{2}$ (pensez à Taylor) pour obtenir que $f(x) - x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = O(x^2)$

3. Utiliser que $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n$, justifier la convergence uniforme de $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n t^x$ sur $[0,1]$ (pensez à la majoration du reste partielle par le théorème des séries alternées) et intégrer terme à terme.

4. Utiliser la formule intégrale et effectuer le changement de variable $u = t^x$ pour aboutir à $x\int_0^1 \frac{du}{(\ln u)(1+u^{-x})}$ et justifier que $\int_0^1 \frac{du}{(\ln u)(1+u^{1/x})} \underset{x\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{du}{2(\ln u)}$ (utiliser les théorèmes de Lebesgue). Ainsi, l'obtention de l'équivalent en $+\infty$ de $f'(x)$ fournit l'équivalent de $f(x)$ (utiliser que $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$ et les théorèmes sur les intégrales divergentes)

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)