1 Exercices

Exercice 1.1 On pose $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt$. Pour quels $x \in \mathbb{R}$, $I(x)$ est-il défini ? Exprimer $I(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 1.2 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour $n \geqslant 2$: $u_n = \frac{ne^{n^2}}{(\ln n)^\alpha} \int_{n^2}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Nature de la série de terme général u_n ?
2. Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $\sum_{k=2}^{n} u_k$.

Exercice 1.3 Soit $p \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. On pose $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{pn}$.

1. Montrer que la suite (a_n) converge et trouver sa limite λ.
2. Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.

Exercice 1.4 Chercher un DAS de $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$ lorsque $n \to +\infty$

Exercice 1.5

1. Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer : $\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}))$.
2. Soit (n_i) une suite d'entiers pairs, (m_i) une suite d'entiers. On suppose que ces deux suites tendent vers $+\infty$.
   On suppose de plus que $m_i \leqslant n_i$ pour tout i et que $\frac{m_i - \frac{n_i}{2}}{\sqrt{n_i}}$ a une limite $\lambda > 0$.
   Trouver un équivalent de $C_{n_i}^{m_i}$.

Exercice 1.6 Justifier l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} \sin(u^n) du$ puis donner un équivalent quand $n \to +\infty$

Exercice 1.7 On définit par récurrence une suite (f_n) de fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2) dt.$$

Etudier la suite (f_n). Convergence simple ? convergence uniforme ? propriétés de la limite ?

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : On pose $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt$. Pour quels $x \in \mathbb{R}$, $I(x)$ est-il défini ? Exprimer $I(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Indication pour l'exercice 1.2 : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour $n \geqslant 2$: $u_n = \frac{ne^{n^2}}{(\ln n)^\alpha} \int_{n^2}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Nature de la série de terme général u_n ?
2. Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $\sum_{k=2}^{n} u_k$.

Indication pour l'exercice 1.3 : Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. On pose $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{pn}$.

1. Montrer que la suite (a_n) converge et trouver sa limite λ.
2. Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.

Indication pour l'exercice 1.4 : Chercher un DAS de $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$ lorsque $n \to +\infty$

Indication pour l'exercice 1.5 :

1. Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer : $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}))$.
2. Soit (n_i) une suite d'entiers pairs, (m_i) une suite d'entiers. On suppose que ces deux suites tendent vers $+\infty$.
   On suppose de plus que $m_i \leqslant n_i$ pour tout i et que $\frac{m_i - \frac{n_i}{2}}{\sqrt{n_i}}$ a une limite $\lambda > 0$.
   Trouver un équivalent de $C_{n_i}^{m_i}$.

Indication pour l'exercice 1.6 : Justifier l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} \sin(u^n) du$ puis donner un équivalent quand $n \to +\infty$

Indication pour l'exercice 1.7 : On définit par récurrence une suite (f_n) de fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2) dt.$$

Etudier la suite (f_n). Convergence simple ? convergence uniforme ? propriétés de la limite ?

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : On pose $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt$. Pour quels $x \in \mathbb{R}$, $I(x)$ est-il défini ? Exprimer $I(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Correction de l'exercice 1.2 : Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour $n \geqslant 2$: $u_n = \frac{ne^{n^2}}{(\ln n)^\alpha} \int_{n^2}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Nature de la série de terme général u_n ?
2. Pour $\alpha = 1$, déterminer un équivalent de $\sum_{k=2}^{n} u_k$.

Correction de l'exercice 1.3 : Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On pose $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{pn}$.

1. Montrer que la suite (a_n) converge et trouver sa limite λ.
2. Trouver un équivalent simple de $a_n - \lambda$.

Correction de l'exercice 1.4 : Chercher un DAS de $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$ lorsque $n \to +\infty$

Correction de l'exercice 1.5 :

1. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer : $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}))$.
2. Soit (n_i) une suite d'entiers pairs, (m_i) une suite d'entiers. On suppose que ces deux suites tendent vers $+\infty$.
   On suppose de plus que $m_i \leqslant n_i$ pour tout i et que $\frac{m_i - \frac{n_i}{2}}{\sqrt{n_i}}$ a une limite $\lambda > 0$.
   Trouver un équivalent de $C_{n_i}^{m_i}$.

Correction de l'exercice 1.6 : Justifier l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} \sin(u^n) du$ puis donner un équivalent quand $n \to +\infty$

Correction de l'exercice 1.7 : On définit par récurrence une suite (f_n) de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2) dt.$$

Etudier la suite (f_n). Convergence simple ? convergence uniforme ? propriétés de la limite ?