1 Exercices

Exercice 1.1 1. Déterminer la série de Fourier de $t \mapsto \left|\sin \frac{t}{2}\right|$.

2. Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f\ 2\pi\text{-périodique}\}$ et Φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin(\frac{x-t}{2})\right| f(t)\ dt.$$

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Exercice 1.2 Donner le développement en série de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{2-\cos x}$.
En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{\cos nt}{2-\cos t} dt$

Exercice 1.3 Soit $z \mapsto f(z)$ une fonction continue sur $\overline{D}(0,1)$ et développable en série entière au voisinage de 0
On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $R(a_n) \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in \mathbb{Z}$
Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$. Conclusion.

Exercice 1.4 Soit $a \in \mathbb{R}$

1. Développer en série de Fourier $f : x \mapsto e^{ax}$ sur $]-\pi, \pi[$ et de période 2π.
2. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2+a^2}$

Exercice 1.5 Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$, on considère $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} a(x+2n\pi)}$

1. Justifier que f est développable en série de Fourier.
2. Calculer ces coefficients de Fourier.
3. En évaluant en $x = 0$, en déduire une identité remarquable.

Exercice 1.6 Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$, on pose $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-a(x+2\pi n)^2)$

1. Justifier que f est développable en série de Fourier.
2. Calculer ces coefficients de Fourier.
3. En évaluant en $x = 0$, en déduire une identité remarquable.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Déterminer la série de Fourier de $t \mapsto \left|\sin \frac{t}{2}\right|$.
2. Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f\ 2\pi\text{-périodique}\}$ et Φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin(\frac{x-t}{2})\right| f(t)\ dt.$$

   Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Indication pour l'exercice 1.2 : Donner le développement en série de Fourier de $x \mapsto \dfrac{1}{2-\cos x}$.
En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \dfrac{\cos nt}{2-\cos t} dt$

Indication pour l'exercice 1.3 : Soit $z \mapsto f(z)$ une fonction continue sur $\overline{D}(0,1)$ et développable en série entière au voisinage de 0
On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $R(a_n) \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in \mathbb{Z}$
Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$. Conclusion.

Indication pour l'exercice 1.4 : Soit $a \in \mathbb{R}$

1. Développer en série de Fourier $f : x \mapsto e^{ax}$ sur $]-\pi, \pi[$ et de période 2π.
2. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+a^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2+a^2}$

Indication pour l'exercice 1.5 :
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$, on considère $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{\operatorname{ch} a(x+2n\pi)}$

1. Justifier que f est développable en série de Fourier.
2. Calculer ces coefficients de Fourier.
3. En évaluant en $x = 0$, en déduire une identité remarquable.

Indication pour l'exercice 1.6 :
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$, on pose $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-a(x+2\pi n)^2)$

1. Justifier que f est développable en série de Fourier.
2. Calculer ces coefficients de Fourier.
3. En évaluant en $x = 0$, en déduire une identité remarquable.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. Déterminer la série de Fourier de $t \mapsto \left|\sin \frac{t}{2}\right|$.

2. Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R});\ f\ 2\pi\text{-périodique}\}$ et Φ l'endomorphisme de E défini par :

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin(\frac{x-t}{2})\right| f(t)\ dt.$$

   Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Correction de l'exercice 1.2 : Donner le développement en série de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{2-\cos x}$.
En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{\cos nt}{2-\cos t} dt$

Correction de l'exercice 1.3 : Soit $z \mapsto f(z)$ une fonction continue sur $\overline{D}(0,1)$ et développable en série entière au voisinage de 0
On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $R(a_n) \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \in \mathbb{Z}$
Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$. Conclusion.

Correction de l'exercice 1.4 : Soit $a \in \mathbb{R}$

1. Développer en série de Fourier $f : x \mapsto e^{ax}$ sur $]-\pi,\pi[$ et de période 2π.

2. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2+a^2}$

Correction de l'exercice 1.5 :
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$, on considère $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} a(x+2n\pi)}$

1. Justifier que f est développable en série de Fourier.

2. Calculer ces coefficients de Fourier.

3. En évaluant en $x = 0$, en déduire une identité remarquable.

Correction de l'exercice 1.6 :
Soit $a \in \mathbb{R}_+^\times$, on pose $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-a(x+2\pi n)^2)$

1. Justifier que f est développable en série de Fourier.

2. Calculer ces coefficients de Fourier.

3. En évaluant en $x = 0$, en déduire une identité remarquable.