1 Exercices

Exercice 1.1 Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on pose, pour $X = (x, y)$

$$N(X) = \sup(|x|, |y|, |x - y|).$$

Montrer que N est une norme et étudier la boule unité.

Exercice 1.2 Soit f l'application de $(\mathbb{R}_+^\times)^2$ dans $(\mathbb{R}_+^\times)^2$ définie par $f(x, y) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{2xy}{x+y}\right)$.
On considère la suite X de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad X_{n+1} = f(X_n) \text{ et } X_0 = (x_0, y_0) \quad \text{avec} x_0 > y_0 > 0$$

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. Etudier la convergence de la suite X.
3. Déterminer sa limite (on pourra étudier la suite $x_n y_n$)

Exercice 1.3 On considère l'application N de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: $(x, y) \mapsto \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |x \cos t + y \cos 2t|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\mathcal{B}$ la boule unité pour cette norme. Montrer que :
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad |x| + |y| \leqslant 1\} \subset \mathcal{B} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 \leqslant 2\}.$$
3. Montrer que le "bord" de $\mathcal{B}$ est constitué de quatre segments.

Exercice 1.4
1. Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$.
2. Soit f une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x+kh)}{h^n}$.

Exercice 1.5 Soit $F = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et N l'application $f \mapsto |f(0)| + \sup\limits_{x \in [0,1]} |f'(x)|$

1. Montrer que N est une norme.
2. Les normes N et $\|\|_\infty$ sont-elles équivalentes ? Conclusion.
(rappel : $\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$)

Exercice 1.6 On considère la fonction $f : x \mapsto \exp(-\dfrac{1}{x})$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\times$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n(\dfrac{1}{x}) \exp(-\dfrac{1}{x})$.
3. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Pour montrer que c'est une norme, revoir le cours, puis majorer $|x+x'|$ en fonction de $N(x,y)+N(x',y')$, idem avec $|y+y'|$ et $|(x+x')-(y+y')|$.
Pour la boule, montrer que cela revient à résoudre une système de trois inégalités dont la dernière se ramène à $x-1 \leqslant y \leqslant x+1$ que l'on sait interpréter graphiquement

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Montrer par récurrence que $x_n > 0$ et $y_n > 0$, ce qui justifie que chaque X_n est calculable.
2. Si $X_n = (x_n, y_n)$, exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et y_n. Ensuite montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes (on montrera pour commencer que $\forall n \geqslant 0$, $x_n > y_n$, puis on donnera la monotonie des suites puis on justifiera que $x_{n+1} - y_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(x_n - y_n)$ puis $x_n - y_n \leqslant (\dfrac{1}{2})^n(x_0 - y_0))$ pour finir utiliser la caractérisation de la convergence des vecteurs en fonction des coordonnées
3. Montrer que la suite $(x_n y_n)_n$ est constante puis passer à la limite.

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Montrer pour commencer que le sup existe (le sup d'une fonction existe ssi la fonction est ...., cf cours de sup !). Pour le reste, s'inspirer de la preuve du cours sur la norme "infinie" sur $\mathbb{R}^n$
2. Majorer par inégalité triangulaire $|x\cos t + y\cos 2t|$ pour la première majoration.
   Pour la seconde, évaluer pour différentes valeurs remarquables de t, l'expression $|x\cos t + y\cos 2t|$ et en déduire que $|a| \leqslant 1$ et $|b| \leqslant 1$.
3. Etudier les extremas de la fonction $t \mapsto f(t) = x\cos t + y\cos 2t$, montrer qu'ils ne peuvent être tous les deux atteint au bord.
   Dans le cas où $\left|\dfrac{a}{4b}\right| > 1$, déterminer les valeurs maximales de f (on distinguera 4 cas selons les signes de x et y et on pensera que pour comparer deux réels α et β, il suffit de déterminer le signe de $\alpha - \beta$).
   Si $\left|\dfrac{a}{4b}\right| \leqslant 1$, calculer les valeurs de f aux points critiques et aux bords, comparer ses 3 valeurs selon les 4 possibilités sur le signe de x et y.
   Au final, en regroupant les 8 cas considérés, on obtient 4 segments qui forment .... un carré ! arf

Indication pour l'exercice 1.4 :

1. Utiliser le $DL_2(x)$ de f
2. Utiliser le $DL_n(x)$ de f, aboutir à l'évaluation des sommes $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^j$. Pour cela, en posant $P(X) = (X-1)^n$, calculer de deux façons différentes $P^{(j)}(1)$ lorsque $j \in [\![0, n]\!]$. Montrer ensuite que la famille
   $$(1, X, X(X-1), ..., X(X-1)\cdots(X-n+1))$$
   est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et écrire les X^j dans cette base (on pensera à déterminer le coefficient dominant lorsque $j = n$).
   En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^j$ selon les valeurs de j puis la limite recherchée.

Indication pour l'exercice 1.5 :

1. $|a| + |b| = 0$ alors $a = b = 0$
2. Uitiliser que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt$ pour obtenir une majoration $\|f\|_\infty \leqslant CN(f)$.
   Ensuite, supposer que $N \leqslant D\,\|\|\|_\infty$ et considérer les fonctions $f_n(x) = C_n e^{\alpha_n x}$ avec C_n et α_n bien choisis
   Pour la conclusion, montrer qu'un théorème classique sur les normes en dimension finie est contredit en dimension infinie.

Indication pour l'exercice 1.6 :

1. théorème de composition des fonctions C^∞.

2. Une récurrence simple.

3. Procéder par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: f est C^n sur $\mathbb{R}$ et $f^n(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

   Pour l'hérédité, on appliquera le théorème de prolongement continu de la dérivée.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : <u>N est une norme</u> :

- **positivité** : $\forall X \in \mathbb{R}^2, \quad N(X) \in \mathbb{R}_+$.
- **définie** : Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(X) = 0 \Leftrightarrow \max(|x|, |y|, |x-y|) = 0 \Leftrightarrow |x| = |y| = |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow X = (0,0)$$

- **" homogénéïté "** : Soient $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$N(\lambda X) = N((\lambda x, \lambda y) = \max(|\lambda x|, |\lambda y|, |\lambda x - \lambda y|) = \max(|\lambda| |x|, |\lambda| |y|, |\lambda| |x-y|) = |\lambda| \max(|x, | |y|, |x-y|) = |\lambda| N(X)$$

- **Inégalité triangulaire** : Soient $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ alors $X + Y = (x + x', y + y')$ et l'on a :

$$N(X + X') = \max(|x + x'|, |y + y'|, |x + x' - (y + y')|)$$

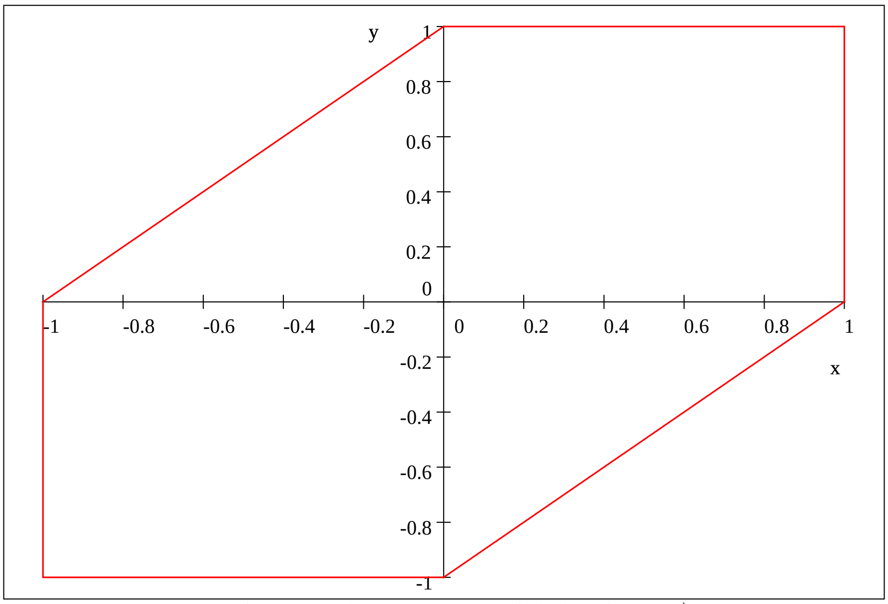
D'autre part, on a également :

$$\begin{array}{rcl} |x + x'| & \leqslant & |x| + |x'| \leqslant \max(|x|, |y|, |x-y|) + \max(|x'|, |y'|, |x'-y'|) = N(X) + N(X') \\ |y + y'| & \leqslant & |y| + |y'| \leqslant \max(|x|, |y|, |x-y|) + \max(|x'|, |y'|, |x'-y'|) = N(X) + N(X') \\ |x + x' - (y + y')| & = & |(x - y) + (x' - y')| \leqslant |x - y| + |x' - y'| \\ & \leqslant & \max(|x|, |y|, |x-y|) + \max(|x'|, |y'|, |x'-y'|) = N(X) + N(X') \\ & \Rightarrow & N(X + X') = \max(|x + x'|, |y + y'|, |x + x' - (y + y')|) \leqslant N(X) + N(X') \end{array}$$

<u>Boule unité</u> : Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$N(X) \leqslant 1 \Leftrightarrow \max(|x|, |y|, |x-y|) \leqslant 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} |x| \leqslant 1 \\ |y| \leqslant 1 \\ |x-y| \leqslant 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ -1 \leqslant x - y \\ x - y \leqslant 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ y \leqslant x + 1 \\ y \geqslant x - 1 \end{array} \right.$$

Par conséquent la boule unité de N est la partie incluse dans le carré $[-1, 1]$ comprise entre les droites $y = x+1$ et $y = x-1$. Sa représentation géométrique est donnée par



Boule unité de N, on y perd la boule : =)

Correction de l'exercice 1.2 :

On note (x_n, y_n) les coordonnées du vecteur X_n.

1. Pour que la suite soit bien définie, il faut et il suffit que l'on puisse toujours calculer X_{n+1} à l'aide de X_n, ce qui ici revient simplement à exiger que $x_n + y_n \neq 0$. Le problème est que cette condition ne passe pas à l'hérédité (la somme de deux éléments non nuls peut être nul). Il faut faire un peu mieux. On sait que x_0 et y_0 sont strictement positifs, on en déduit que $x_1 = \dfrac{x_0 + y_0}{2}$ et $y_1 = \dfrac{2x_0y_0}{x_0 + y_0}$ sont strictement positifs, ce qui implique que x_2 et y_2 sont strictement positifs, etc.
   On procède donc par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: x_n et y_n existent et sont strictement positfs.
   Initialisation : $(\mathcal{P}_0)$ est vraie car x_0 et y_0 sont strictement positifs.
   Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie. Alors x_n et y_n sont strictement positfs donc les réels $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{2x_ny_n}{x_n + y_n}$ existent bien (la division est possible car $x_n + y_n > 0$) et sont strictement positifs donc $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, ce qui achève la récurrence.
   Par conséquent, tous les termes de la suite $(X_n)_n$ existe bien et la suite $(X_n)_n$ est bien définie.

2. Puisque $X_{n+1} = f(X_n) \Leftrightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}) = (\dfrac{x_n + y_n}{2}, \dfrac{2x_ny_n}{x_n + y_n})$, on en déduit que les suites (x_n, y_n) vérifient

$$x_0 > y_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \dfrac{2x_ny_n}{x_n + y_n} \end{cases}$$

   Face à deux suites entrelacées, on essait de voir si par hasard elles ne sont pas adjacentes. Pour commencer, en se rappelant que pour tout entier n, les réels x_n et y_n sont strictement positifs, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} - \frac{2x_ny_n}{x_n + y_n} = \frac{(x_n + y_n)^2 - 4x_ny_n}{2(x_n + y_n)} = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(x_n + y_n)} \geqslant 0$$

   donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \geqslant y_{n+1}$ ce qui équivaut à ce que $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad x_n \geqslant y_n$. Cette inégalité étant vraie pour 0, on vien de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \geqslant y_n$.
   Mononotonie de $(x_n)_n$: puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + y_n}{2} - x_n = \frac{\overbrace{y_n - x_n}^{\leqslant 0}}{2} \leqslant 0,$$

   on en déduit que la suite $(x_n)_n$ est décroissante.
   Monotonie de $(y_n)_n$: puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} - y_n = \frac{2x_ny_n}{x_n + y_n} - y_n = \frac{2x_ny_n - x_ny_n - y_n^2}{x_n + y_n} = \frac{x_ny_n - y_n^2}{x_n + y_n} = \frac{\overbrace{y_n}^{\geqslant 0}\overbrace{(x_n - y_n)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{x_n + y_n}_{\geqslant 0}} \geqslant 0,$$

   on en déduit que la suite $(y_n)_n$ est croissante.
   Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{x_n - y_n}{x_n + y_n} \leqslant 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(x_n + y_n)} = \frac{1}{2} \times (x_n - y_n) \times \underbrace{\frac{x_n - y_n}{x_n + y_n}}_{\leqslant 1} \leqslant \frac{1}{2}(x_n - y_n).$$

   Une récurrence absolument classique montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant x_n - y_n \leqslant (\frac{1}{2})^n(x_0 - y_0).$$

   Cette inégalité combinée au fait que la suite $\left((\dfrac{1}{2})^n(x_0 - y_0)\right)_n$ converge vers 0 permet d'appliquer le théorème d'encadrement donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$
   Par conséquent, nous venons de montrer que la suite $(x_n)_n$ est décroissante, la suite $(y_n)_n$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, c'est-à-dire que les deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont adjacentes. On est alors en droit d'affirmer que ces deux suites sont convergentes et qu'elles ont même limite L.
   Puisque nous sommes en dimension finie, on en déduit que la suite de vecteurs $(X_n)_n$ converge vers le vecteur (L, L).

3. On suit l'indication :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1}y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \times \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} = x_n y_n$$
Autrement dit la suite $(x_n y_n)_n$ est constante et sa valeur initiale est $x_0 y_0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n y_n = x_0 y_0$. En passant à la limite dans cette égalité, on obtient que $L^2 = x_0 y_0$, ce qui équivaut à dire que $L = \pm\sqrt{x_0 y_0}$. Puisque la suite $(x_n)_n$ est positif, on en déduit que $L \geqslant 0$ donc $L = \sqrt{x_0 y_0}$.
Conclusion : la suite de vecteurs $(X_n)_n$ converge vers le vecteur $(\sqrt{x_0 y_0}, \sqrt{x_0 y_0})$

Correction de l'exercice 1.3 :

1. Pour commencer, montrons que N est bien définie (ce n'est une évidente que le sup d'une fonction positive soit un réel, c'est-à-dire une expression finie et non $+\infty$).
   - **Existence de** N : l'inégalité triangulaire, combinée au fait que $\forall z \in \mathbb{R}, \quad |\cos z| \leqslant 1$, montre que
   $$(1) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad |x\cos t + y\cos 2t| \leqslant |x\cos t| + |y\cos 2t| \leqslant |x|\,|\cos t| + |y|\,|\cos 2t| \leqslant |x| + |y|$$
   donc la fonction $t \mapsto |x\cos t + y\cos 2t|$ est majorée sur $\mathbb{R}$ ce qui implique qu'elle admette un sup sur $\mathbb{R}$.
   - **Positivité** : c'est immédiat puisque le sup d'une fonction positive est positif.
   - **Définie** :
   $$N(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} |x\cos t + y\cos 2t| = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad x\cos t + y\cos 2t = 0$$
   En évaluant cette égalité en $t = 0$, on obtient que $x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y$ et en évaluant en $t = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient que $-y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ donc $x = 0$ et le vecteur (x,y) est nul.
   - " **Homogénéïté** " :Soit λ un réel
   $$N(\lambda(x,y)) = N((\lambda x, \lambda y)) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\lambda x\cos t + \lambda y\cos 2t| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\lambda(x\cos t + y\cos 2t)| = |\lambda| \sup_{t\in\mathbb{E}} |x\cos t + y\cos 2t| = |\lambda|\, N(x,y)$$
   - **Inégalité triangulaire** : On a pour commencer
   $$N((x,y) + (x',y')) = N((x+x'),(y+y')) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |(x+x')\cos t + (y+y')\cos 2t|\,.$$
   Ensuite, on a
   $$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad |(x+x')\cos t + (y+y')\cos 2t| &= |(x\cos t + y\cos 2t) + (x'\cos t + y'\cos 2t)|\\ &\leqslant |x\cos t + y\cos 2t| + |x'\cos t + y'\cos 2t| \leqslant \sup_{a\in\mathbb{R}} |x\cos a + y\cos 2a| + \sup_{a\in\mathbb{R}} |x\cos a + y\cos 2a|\\ &\leqslant N(x,y) + N(x',y')\end{aligned}$$
   Le réel $N(x,y) + N(x',y')$ est indépendant de t et il majore la fonction $t \mapsto |(x+x')\cos t + (y+y')\cos 2t|$ donc il est plus grand que le sup de cette fonction, ce qui nous donne :
   $$N((x,y) + (x',y')) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |(x+x')\cos t + (y+y')\cos 2t| \leqslant N(x,y) + N(x',y')$$

   Conclusion : N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad |x| + |y| \leqslant 1\} \subset \mathcal{B}$: Soit (a,b) un vecteur contenu dans $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad |x| + |y| \leqslant 1\}$ c'est-à-dire $|a| + |b| \leqslant 1$. D'après la majoration (1) de la question 1), on dispose de la majoration $N(a,b) \leqslant |a| + |b| \leqslant 1$ donc (a,b) appartient bien à $\mathcal{B}$.
   $\mathcal{B} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 \leqslant 2\}$: Soit (a,b) un vecteur contenu dans $\mathcal{B}$ c'est-à-dire que
   $$\sup_{t\in\mathbb{R}} |a\cos t + b\cos 2t| \leqslant 1 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad |a\cos t + b\cos 2t| \leqslant 1$$
   En évaluant cette inégalité pour $t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$ et $t = \pi$, on obtient que
   $$\left\{\begin{array}{c} |a+b| \leqslant 1 \\ |b| \leqslant 1 \\ |-a+b| \leqslant 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |a+b| \leqslant 1 \\ |b| \leqslant 1 \\ |a-b| \leqslant 1 \end{array}\right.$$
   On en déduit que
   $$(2\,|a| = |2a| = |a + b + (a-b)| \leqslant |a+b| + |a-b| \leqslant 1 + 1 = 2) \Rightarrow |a| \leqslant 1$$
   On a ainsi montrer que $|a| \leqslant 1$ et $|b| \leqslant 1$ ce qui implique que $a^2 \leqslant 1$ et $b^2 \leqslant 1$ donc $a^2 + b^2 \leqslant 1 + 1 = 2$ et $\mathcal{B} \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 \leqslant 2\}$

3. Soit (a, b) appartenant au bord de $\mathcal{B}$ c'est-à-dire que
$$N(a, b) = 1 \Leftrightarrow \sup_{t\in\mathbb{R}} |a\cos t + b\cos 2t| = 1$$
La fonction $t \mapsto f(t) = a\cos t + b\cos 2t$ est 2π-périodique, donc
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |a\cos t + b\cos 2t| = \sup_{t\in[0,2\pi]} |a\cos t + b\cos 2t|$$
La fonction f étant continue sur le segment $[0, 2\pi]$, elle atteint ses bornes sur ce segment.
Supposons que les deux bornes soient atteintes aux extrémités. Puisque $f(0) = f(2\pi)$, on en déduit qu'elle est constante.
Soit C cette constante : puisque
$$f(0) = a + b, \quad f(\frac{\pi}{2}) = -b, \quad f(\pi) = -a + b$$
on a
$$\left\{\begin{array}{c} a+b=C \\ -b=C \\ -a+b=C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} b=-C \\ a=2C \\ -a=2C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cc} C=0 & L_2+L_3 \\ a=0 & \\ b=0 & \end{array}\right.$$
donc $(a, b) = 0$ et $N(a, b) = 0$, ce qui est impossible.
Par conséquent, l'un au moins des deux extrémas est atteint à l'intérieur de $[0, 2\pi]$. Soit $t_0 \in]0, 2\pi[$ un extrema. La caractérisation des extremas montre que
$$\begin{aligned} f'(t_0) &= 0 \Leftrightarrow -a\sin t_0 - 2b\sin 2t_0 = 0 \Leftrightarrow a\sin t_0 + 4b\sin t_0\cos t_0 = 0 \Leftrightarrow \sin t_0(a + 4b\cos t_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow t_0 = \pi \text{ ou } a + 4b\cos t_0 = 0 \end{aligned}$$
Si $b = 0$ alors $a = 0$, ce qui impossible (on a fait l'hypothèse $(a, b) \neq (0, 0)$ donc
$$f'(t_0) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \pi \text{ ou } \cos t_0 = -\frac{a}{4b}$$
Pour que cette dernière égalité soit possible, il est indispensable d'éxiger que $\left|\frac{a}{4b}\right| \leqslant 1$.

- Si $\left|\frac{a}{4b}\right| > 1 \Leftrightarrow |a| > 4|b|$ alors le seul extréma de f dans $]0, 2\pi[$ est $t = \pi$ et $f(\pi) = -a + b$. L'autre extréma est alors atteint en $t = 0$ ou $t = 2\pi$ et $f(0) = f(2\pi) = a + b$ donc f est comprise entre $b - a$ et $a + b$ et ses deux valeurs sont atteinte donc
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |a\cos t + b\cos 2t| = \max(|b - a|, |a + b|) \Rightarrow \max(|b - a|, |a + b|) = 1$$
  - Premier cas : si $a \geqslant 0$ et $b > 0$ alors la condition $|a| > 4|b|$ se traduit par $a > 4b$. Alors la condition $b > a$ est impossible sinon
  $$b > a > 4b \Rightarrow b > 4b \Rightarrow 3b < 0 \Rightarrow b < 0$$
  Par conséquent, $b \leqslant a$ et $b - a \leqslant 0$, ce qui nous donne $N(a, b) = \max(a - b, a + b)$. Comme $a - b \leqslant a + b$, on a $N(a, b) = a + b$ et la condition $N(a, b) = 1$ se traduit par $a + b = 1$. Puisque nous avons exiger que $a > 4b$, on a
  $$1 = a + b > 4b + b \Leftrightarrow b < \frac{1}{5}$$
  Réciproquement, si $a > 0$ et $b > 0$ sont tels que $a + b = 1$ avec $0 < b < \frac{1}{5}$ alors
  $$a = 1 - b > 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \text{ et } \frac{4}{5} > 4b \text{ donc } a > \frac{4}{5} > 4b$$
  donc $N(a, b) = a + b = 1$.
  Nous venons donc de montrer que
  $$(0 < 4b < a \text{ et } N(a, b) = 1) \Leftrightarrow (a = 1 - b \text{ et } 0 < b < \frac{1}{5})$$
  - Deuxième cas : Si $a \leqslant 0$ et $b < 0$ alors $-a \geqslant 0$ et $-b > 0$ et $N(-a, -b) = N(a, b) = 1$. Nous pouvons utiliser le premier cas au vecteur $(-a, -b)$ donc nous disposons de l'équivalence
  $$(0 < 4(-b) < -a \text{ et } N(-a, -b) = 1) \Leftrightarrow (-a = 1 - (-b) \text{ et } 0 < -b < \frac{1}{5})$$
  ce qui signifie que
  $$(a < 4b < 0 \text{ et } N(a, b) = 1) \Leftrightarrow (a = -1 - b \text{ et } -\frac{1}{5} < b < 0)$$

– Troisième cas : Si $a \geqslant 0$ et $b < 0$ alors la condition $|a| > 4|b|$ se traduit par $a > -4b$. Alors la condition $b > a$ est impossible sinon
$$b > a > -4b \Rightarrow b > -4b \Rightarrow 5b > 0 \Rightarrow b > 0$$
Par conséquent, $b \leqslant a$ et $b - a \leqslant 0$. La condition $b + a < 0$ est impossible sinon
$$b < -a \text{ et } -a < 4b \text{ donc } b < 4b \Rightarrow 0 < 3b \Rightarrow b > 0$$
ce qui nous donne $N(a, b) = \max(a - b, a + b)$ et comme $a - b \geqslant a + b$ (car $a - b - (a + b) = -2\underbrace{b}_{<0} > 0$, on a $N(a, b) = a - b$. La condition $N(a, b) = 1$ se traduit alors par $a - b = 1$. Puisque nous avons exiger que $a > -4b$, on a
$$1 = a - b > -4b - b \Leftrightarrow 1 > -5b \Leftrightarrow b > -\frac{1}{5}$$
Réciproquement, si $a \geqslant 0$ et $b < 0$ sont tels que $a - b = 1$ avec $-\frac{1}{5} < b < 0$ alors
$$a = 1 + b > 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \text{ et } -4b < \frac{4}{5} \text{ donc } a > \frac{4}{5} > -4b$$
donc $N(a, b) = a - b = 1$.
Nous venons donc de montrer que
$$(0 < -4b \leqslant a \text{ et } N(a, b) = 1) \Leftrightarrow (a = 1 + b \text{ et } -\frac{1}{5} < b < 0)$$

– Quatrième cas : Si $a \leqslant 0$ et $b > 0$ alors $-a \geqslant 0$ et $-b < 0$ et $N(-a, -b) = N(a, b) = 1$. Nous pouvons utiliser le troisième cas avec le vecteur $(-a, -b)$ donc nous disposons de l'équivalence
$$(0 < -4(-b) \leqslant -a \text{ et } N(-a, -b) = 1) \Leftrightarrow (-a = 1 + (-b) \text{ et } -\frac{1}{5} < -b < 0)$$
ce qui signifie que
$$(a \leqslant -4b < 0 \text{ et } N(a, b) = 1) \Leftrightarrow (a = -1 + b \text{ et } 0 < b < \frac{1}{5})$$

- Si $\left|\frac{a}{4b}\right| \leqslant 1$ alors soit $t_0 = \pi$ et $f(t_0) = b - a$ soit $\cos t_0 = -\frac{a}{4b}$ et
$$f(t_0) = -\frac{a^2}{4b} + b(2\frac{a^2}{16b^2} - 1) = -\frac{a^2 + 8b^2}{8b}$$

D'autre part $f(0) = f(2\pi) = a + b$. Comparons ces trois nombres :
$$(-\frac{a^2 + 8b^2}{8b}) - (b + a) = -\frac{(a + 4b)^2}{8b}, \quad (-\frac{a^2 + 8b^2}{8b}) - (b - a) = -\frac{(-a + 4b)^2}{8b}, \quad (a + b) - (b - a) = 2a$$

– Premier cas : Si $a \geqslant 0$ et $b > 0$, nous avons
$$\begin{aligned} -\frac{a^2 + 8b^2}{8b} &\leqslant (b + a), \quad -\frac{a^2 + 8b^2}{8b} \leqslant (b - a), \quad (a + b) \geqslant (b - a) \\ &\Rightarrow -\frac{a^2 + 8b^2}{8b} \leqslant (b - a) \leqslant (b + a) \end{aligned}$$
donc on a l'encadrement suivant de f
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad -\frac{a^2 + 8b^2}{8b} \leqslant f(t) \leqslant a + b$$
les valeurs de part et d'autre étant prises, on a
$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(t)| = \max(\left|-\frac{a^2 + 8b^2}{8b}\right|, |a + b|) = \max(\frac{a^2 + 8b^2}{8b}, a + b)$$
Puisque $\left|\frac{a}{4b}\right| \leqslant 1$ ce traduit par $\frac{a}{4b} \leqslant 1$ (donc $\frac{a}{8b} \leqslant \frac{1}{2} < 1$)
$$\frac{a^2 + 8b^2}{8b} - (a + b) = a(\frac{a}{8b} - 1) \leqslant 0$$

donc
$$\sup_{t\in[0,2\pi]}|f(t)| = a+b \Leftrightarrow a+b=1$$
(par définition de $N(a,b)$). Or nous avons exiger que $a \leqslant 4b$ donc
$$1 = a+b \leqslant 4b+b \Leftrightarrow 1 \leqslant 5b \Leftrightarrow b \geqslant \frac{1}{5} \text{ et } b \leqslant a+b = 1.$$
Réciproquement si a et b sont deux réels positifs, tels que que $\frac{1}{5} \leqslant b \leqslant 1$ et $a = 1-b$ alors
$$a \leqslant 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad \frac{4}{5} \leqslant 4b \quad \text{donc} \quad a \leqslant 4b$$
donc $\sup\limits_{t\in[0,2\pi]}|f(t)| = a+b = 1$. Nous venons donc de montrer que
$$(0 \leqslant a \leqslant 4b \text{ et } N(a,b)=1) \Leftrightarrow (a = 1-b \text{ et } \frac{1}{5} \leqslant b \leqslant 1)$$

– Deuxième cas : Si $a \leqslant 0$ et $b \leqslant 0$ alors $-a \geqslant 0$ et $-b \geqslant 0$ et $N(-a,-b) = N(a,b) = 1$. Nous pouvons utiliser le premier cas avec le vecteur $(-a,-b)$ donc nous disposons de l'équivalence
$$(0 \leqslant -a \leqslant -4b \text{ et } N(-a,-b)=1) \Leftrightarrow (-a = 1-(-b) \text{ et } \frac{1}{5} \leqslant -b \leqslant 1)$$
ce qui signifie que
$$(4b \leqslant a \leqslant 0 \text{ et } N(a,b)=1) \Leftrightarrow (a = -1-b \text{ et } -1 \leqslant -b \leqslant -\frac{1}{5})$$

– Troisième cas : Si $a \geqslant 0$ et $b < 0$ alors $\left|\frac{a}{4b}\right| \leqslant 1$ ce traduit par $0 \leqslant \frac{a}{-4b} \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{a}{4b} \leqslant 0$.
$$\begin{aligned} -\frac{a^2+8b^2}{8b} &\geqslant (b+a), \quad -\frac{a^2+8b^2}{8b} \geqslant (b-a), \quad (a+b) \geqslant (b-a) \\ &\Rightarrow (b-a) \leqslant (b+a) \leqslant -\frac{a^2+8b^2}{8b} \end{aligned}$$
donc on a l'encadrement suivant de f
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad b-a \leqslant f(t) \leqslant -\frac{a^2+8b^2}{8b}$$
les valeurs de part et d'autre étant prises, on a
$$\sup_{t\in[0,2\pi]}|f(t)| = \max(\left|-\frac{a^2+8b^2}{8b}\right|, |b-a|) = \max(\frac{a^2+8b^2}{8b}, a-b) \text{ (car } b \leqslant 0 \leqslant a \text{ donc } b-a \leqslant 0)$$
On a $-1 \leqslant \frac{a}{4b} \leqslant 0$ donc $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{a}{8b} \leqslant 0$, ce qui ne donne
$$\frac{a^2+8b^2}{8b} - (a-b) = \frac{(a-4b)^2}{8b} \leqslant 0$$
donc
$$\sup_{t\in[0,2\pi]}|f(t)| = a-b \Leftrightarrow a-b=1 \Leftrightarrow a = 1+b$$
(par définition de $N(a,b)$). Or nous avons exiger que $-1 \leqslant \frac{a}{4b} \leqslant 0 \underset{b<0}{\Leftrightarrow} 0 \leqslant a \leqslant -4b$ donc
$$\begin{aligned} a &= 1+b \Rightarrow 1+b < -4b \Leftrightarrow 5b < -1 \Leftrightarrow b < -\frac{1}{5} \\ a &= 1+b \Rightarrow 1+b \geqslant 0 \Leftrightarrow b \geqslant -1 \end{aligned}$$
Réciproquement si on a deux réels a, b tels que $a \geqslant 0$ et $b < 0$ avec $-1 \leqslant b \leqslant -\frac{1}{5}$ et $a = 1+b$ alors
$$a = 1+b \leqslant 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \text{ et } 4b \leqslant -\frac{4}{5} \text{ donc } -4b \geqslant \frac{4}{5} \text{ donc } a \leqslant -4b$$
donc $\sup\limits_{t\in[0,2\pi]}|f(t)| = a-b = 1$. Nous venons donc de montrer que
$$(0 \leqslant a \leqslant -4b \text{ et } N(a,b)=1) \Leftrightarrow (a = 1+b \text{ et } -1 \leqslant b \leqslant -\frac{1}{5})$$

– Quatrième cas : Si $a \leqslant 0$ et $b > 0$ alors $-a \leqslant 0$ et $-b > 0$ et $N(-a,-b) = N(a,b) = 1$. Nous pouvons utiliser le troisième cas avec le vecteur $(-a,-b)$ donc nous disposons de l'équivalence

$$(0 \leqslant -a \leqslant -4(-b) \text{ et } N(-a,-b) = 1) \Leftrightarrow (-a = 1 + (-b) \text{ et } -1 \leqslant -b \leqslant -\frac{1}{5})$$

ce qui signifie que

$$(-4b \leqslant a \leqslant 0 \text{ et } N(a,b) = 1) \Leftrightarrow (a = -1 + b \text{ et } \frac{1}{5} \leqslant b \leqslant 1)$$

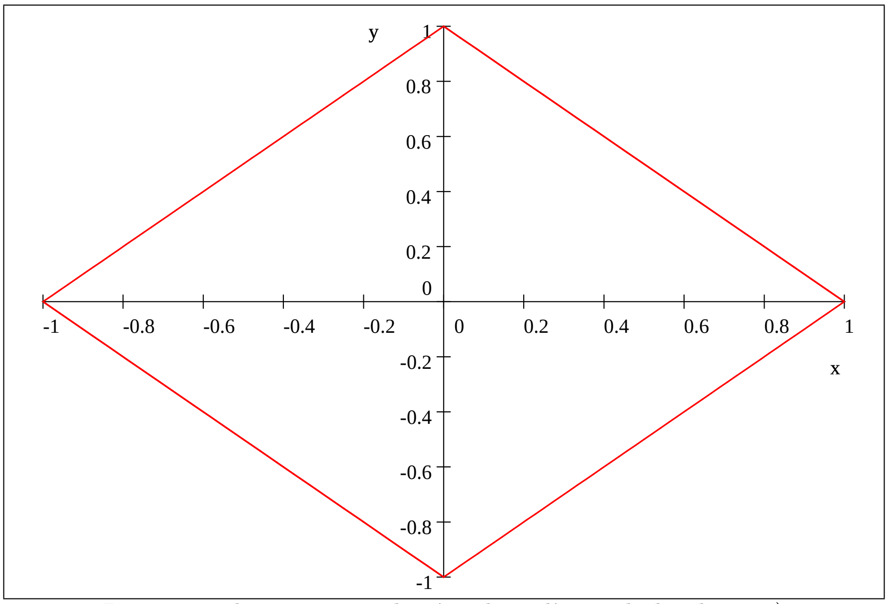
Conclusion : Résumons ce nous venons de montrer

- $(0 < 4b < a \text{ et } N(a,b) = 1) \Leftrightarrow (a = 1 - b \text{ et } 0 < b < \frac{1}{5})$ 1
- $(a < 4b < 0 \text{ et } N(a,b) = 1) \Leftrightarrow (a = -1 - b \text{ et } -\frac{1}{5} < -b < 0)$ 2
- $(0 < -4b \leqslant a \text{ et } N(a,b) = 1) \Leftrightarrow (a = 1 + b \text{ et } -\frac{1}{5} < b < 0)$ 3
- $(a \leqslant -4b < 0 \text{ et } N(a,b) = 1) \Leftrightarrow (a = -1 + b \text{ et } 0 < b < \frac{1}{5})$ 4
- $(0 \leqslant a \leqslant 4b \text{ et } N(a,b) = 1) \Leftrightarrow (a = 1 - b \text{ et } \frac{1}{5} \leqslant b \leqslant 1)$ 1
- $(4b \leqslant a \leqslant 0 \text{ et } N(a,b) = 1) \Leftrightarrow (a = -1 - b \text{ et } -1 \leqslant -b \leqslant -\frac{1}{5})$ 2
- $(0 \leqslant a \leqslant -4b \text{ et } N(a,b) = 1) \Leftrightarrow (a = 1 + b \text{ et } -1 \leqslant b \leqslant -\frac{1}{5})$ 3
- $(-4b \leqslant a \leqslant 0 \text{ et } N(a,b) = 1) \Leftrightarrow (a = -1 + b \text{ et } \frac{1}{5} \leqslant b \leqslant 1)$ 4

On peut résumer cela en $(a,b) \in \mathcal{B}$ ssi

- $a > 0$ et $b > 0$ alors $a = 1 - b$ (cela implique que $(a,b) \in [0,1]^2$)
- $a < 0$ et $b < 0$ alors $a = -1 - b$ (cela implique que $(a,b) \in [-1,0]^2$
- $a > 0$ et $b < 0$ alors $a = 1 + b$ (cela implique que $(a,b) \in [0,1] \times [-1,0]$
- $a \leqslant 0$ et $b > 0$ alors $a = -1 + b$ (cela implique que $(a,b) \in [-1,0] \times [0,1]$

Et voilà la bête !



Pour paraphraser une pub :c'est bon d'avoir la boule : =)

Correction de l'exercice 1.4 : Le résultat de base est l'existence de $DL_n(x)$ pour toute fonction de classe C^n au voisinage de x (cela découle grosso-modo de la formule de Taylor, cf son cours). En outre, son $DL_n(x)$ est donné par

$$f(x+t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}t^k + o(t^n)$$

et il ne reste plus qu'à calculer

1. Nous appliquons la formule précédente en $t = 2h$ et $t = h$, ce qui nous donne

$$f(x+2h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2}f"(x) + o(h^2) \underset{h\to 0}{=} f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f"(x) + o(h^2)$$
$$f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f"(x) + o(h^2)$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) &\underset{h\to 0}{=} f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f"(x) - 2\left(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f"(x)\right) + f(x) + o(h^2) \\ &\underset{h\to 0}{=} h^2f"(x) + o(h^2) \\ \Rightarrow \quad \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} &\underset{h\to 0}{=} f"(x) + o(1) \underset{h\to 0}{\to} f"(x) \end{aligned}$$

2. Puisque f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule du début d'exercice en tout point $x \in \mathbb{R}$ et en $t = kh$, ce qui nous donne

$$f(x+kh) \underset{h\to 0}{=} \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(kh)^j + o(t^n)$$

donc, en utilisant Fubini pour les sommes, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(x+kh) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}(kh)^j + o(h^n) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}(kh)^j + o(h^n) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}(kh)^j + o(h^n) = \sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^j + o(h^n) \end{aligned}$$

Il reste à évaluer les sommes $S_j = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^j$ pour $j \in [\![0,n]\!]$. Cela ressemble à une formule du binôme mais le facteur k^j est génant, il fait penser à un début de dérivée $j^{ième}$. On considère le polynôme

$$P(X) = (1-X)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}X^k = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}X^k$$

Puisque 1 est une racine d'ordre exactement n de P, on a

$$\forall j \in [\![0,n-1]\!], \quad P^{(j)}(1) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(n)}(1) = n!$$

Puisque $\forall j \in [\![0,n]\!]$,

$$P^{(j)}(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)\cdots(k-j+1)X^{k-j}(-1)^{n-k} \underset{(-1)^{-k}=(-1)^k}{=} (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k(k-1)\cdots(k-j+1)X^{k-j}$$

On en déduit que, en évaluant en $X = 1$

$$(1) : \forall j \in [\![0,n-1]\!], \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k(k-1)\cdots(k-j+1) = 0$$

Un intermède d'algèbre linéaire : Soit la famille de polynômes

$$(1, X, X(X-1), ..., X(X-1)\cdots(X-j+1), ..., X(X-1)\cdots(X-(n-1)+1) = X(X-1)\cdots(X-(n-2))$$

Pour la simplicité des écritures suivantes, on convient que la notation $X(X-1)\cdots(X-j+1)$ correspond, lorsque $j=0$, au polynôme 1.

Cette famille de polynômes est échelonnée en degré donc c'est une famille libre. Elle est de cardinal n et puisqu'elle est clairement contenu dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, qui est de dimension n, on en déduit qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi, pour tout entier $j \in [\![0, n-1]\!]$, il existe des réels $a_{i,j}$ tels que

$$X^j = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,j} X(X-1)\cdots(X-i+1)$$

En particulier, pour $X = k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$(2) : k^j = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,j} k(k-1)\cdots(k-i+1)$$

Fin de l'intermède d'algèbre linéaire.
Les formules (1) et (2) nous permettent donc d'écrire, en utilisant Fubini pour les sommes finies, que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$

$$\begin{aligned} S_j &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \tbinom{n}{k} k^j = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \tbinom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,j} k(k-1)\cdots(k-i+1) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^k \tbinom{n}{k} a_{i,j} k(k-1)\cdots(k-i+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \tbinom{n}{k} a_{i,j} k(k-1)\cdots(k-i+1) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,j} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \tbinom{n}{k} k(k-1)\cdots(k-i+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,j} \times 0 = 0 \quad ((1) \text{ car } i \in [\![0, n-1]\!]) \end{aligned}$$

Si $j = n$, il est aisé de vérifier que la famille

$$(1, X, X(X-1), ..., X(X-1)\cdots(X-j+1), ..., X(X-1)\cdots(X-n+1)$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et qu'il existe donc des réels $a_{i,n}$ tels que

$$X^n = \sum_{i=0}^{n} a_{i,n} X(X-1)\cdots(X-j+1) \Rightarrow \forall k \in [\![0, n]\!], \quad k^n = \sum_{i=0}^{n} a_{i,n} k(k-1)\cdots(k-i+1)$$

En considérant le coefficient dominant, on a $a_{n,n} = 1$. Les formules (1) et (3) nous donnent :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \tbinom{n}{k} k^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \tbinom{n}{k} \sum_{i=0}^{n} a_{i,n} k(k-1)\cdots(k-i+1) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^k \tbinom{n}{k} a_{i,n} k(k-1)\cdots(k-i+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \tbinom{n}{k} a_{i,n} k(k-1)\cdots(k-i+1) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \tbinom{n}{k} k(k-1)\cdots(k-i+1)}_{=0 \text{ quand } i \in [\![0,n-1]\!]} \\ &= \underbrace{a_{n,n}}_{=1} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \tbinom{n}{k} \underbrace{k(k-1)\cdots(k-n+1)}_{=0 \text{ quand } k \in [\![0,n-1]\!]} = (-1)^n \binom{n}{n} n(n-1)...(n-n+1) = (-1)^n n! \end{aligned}$$

En résumé, on a montré que

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!], \quad S_j = 0 \quad \text{et} \quad S_n = (-1)^n n!$$

donc

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \tbinom{n}{k} f(x+kh) \underset{h\to 0}{=} \frac{f^{(n)}(x) h^n}{n!} \times (-1)^n n! + o(h^n) \underset{h\to 0}{=} (-1)^n f^{(n)}(x) h^n + o(h^n) \\ \Rightarrow\ &\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f(x+kh)}{h^n} \underset{h\to 0}{=} (-1)^n f^{(n)}(x) + o(1) \underset{h\to 0}{\to} (-1)^n f^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1.5 :

1. • **Existence** f est C^1 sur $[0,1]$ alors f' est continue le segment $[0,1]$ donc elle est bornée sur ce segment et $\sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ existe.

- **Positivité** : c'est évident.
- **Définie** : $N(f)=0 \Leftrightarrow |f(0)|+\sup\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|=0$. La somme de deux réels positifs est nulle ssi les deux réels sont nulles donc $f(0)=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|=0$. La fonctions $|f'|$ est positive et son sup sur $[0,1]$ est nul donc f' est nulle sur l'intervalle $[0,1]$ ce qui implique que f est constante sur cet intervalle. Puisque $f(0)=0$, on a bien $f=0$.
- **" Homogénéïté "** : Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $f\in E$:
$$N(\lambda f)=|\lambda f(0)|+\sup_{x\in[0,1]}|\lambda f'(x)|=|\lambda|\,|f(0)|+|\lambda|\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|=|\lambda|\,(|f(0)|+\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|)=|\lambda|\,N(f)$$
- **Inégalité triangulaire** : Soient f et g deux éléments de E
$$\begin{array}{lcl}(1) & : & |f(0)+g(0)|\leqslant|f(0)|+|g(0)|\\ \forall x & \in & [0,1],\quad |f'(x)+g'(x)|\leqslant|f'(x)|+|g'(x)|\leqslant\sup\limits_{t\in[0,1]}|f'(t)|+\sup\limits_{t\in[0,1]}|g'(t)|\end{array}$$
La fonction $x\mapsto|f'(x)+g'(x)|$ est majorée sur $[0,1]$ par le réel $N(f)+N(g)$ qui est indépendant de x donc
$$(2) : \sup_{x\in[0,1]}|f'(x)+g'(x)|\leqslant N(f)+N(g)$$
La combinaison de (1) et (2) montre que l'on a
$$N(f+g)=|f(0)+g(0)|+\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)+g'(x)|\leqslant|f(0)|+|g(0)|+\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|+\sup_{x\in[0,1]}|g'(x)|=N(f)+N(g)$$

2. On note $\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$ et par conséquent, $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|=\|f'\|_\infty$.

Pour commencer, remarquons que $\forall x\in[0,1],\quad f(x)=f(0)+\int\limits_0^x f'(t)dt$ (qui donne au passage toutes les formules de Taylor). On a donc la majoration suivante
$$\forall x\in[0,1],\quad |f(x)|\leqslant|f(0)|+\left|\int_0^x f'(t)dt\right|\leqslant|f(0)|+\int_0^x|f'(t)|\,dt\leqslant|f(0)|+\int_0^x\|f'\|_\infty\,dt=|f(0)|+\|f'\|_\infty\,x\leqslant|f(0)|+\|f'\|_\infty=N($$
La fonction $x\mapsto|f(x)|$ est majorée sur $[0,1]$ par le réel $N(f)$ qui est indépendant de x donc
$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\leqslant N(f)\Leftrightarrow\|f\|_\infty\leqslant N(f)$$
et cette majoration est valable pour toute fonction f de E ce qui implique que N est plus finie que $\|\|_\infty$ (une suite de E convergeant pour N converge pour $\|\|_\infty$)
Existe-il une constante C positive telle que $\forall f\in E,\quad N(f)\leqslant C\,\|f\|_\infty$?
Remarque : Si une suite $(f_n)_n$ de fonctions de E converge vers 0 pour $\|\|_\infty$, cela signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n\|_\infty$ donc que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0. La majoration $N(f_n)\leqslant C\,\|f_n\|_\infty$ implique que la suite $(f_n)_n$ converge également vers 0 pour la norme N, c'est-à-dire que $|f_n(0)|\to0$ et que $\|f_n'\|_\infty\to0$. Autrement dit, on exige que $f_n(0)\to0$ et que la suite des dérivées de $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0. Cela parait étonnant que la convergence uniforme de $(f_n)_n$ implique la convergence uniforme de $(f_n')_n$ et nous allons construire à la main un contre-exemple
Considérons la suite $(f_n)_n$ de E définie par $\forall x\in[0,1],\quad f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{n}$ donc $f_n(0)=\dfrac1n$ et $f_n'(x)=-e^{-nx}$.
La fonction f_n est décroissante positive sur $[0,1]$ et $f_n(0)=\dfrac1n$ donc $\|f_n\|=\dfrac1n$.
La fonction f_n' est croissante négative (l'opposé d'une fonction décroissante est croissante) et $f_n'(0)=-1$ donc $\|f_n'\|_\infty=|-1|=1$.
On en déduit que $N(f_n)=\dfrac1n+1\to1$ et $\|f_n\|_\infty=\dfrac1n\to0$, ce qui contredit le fait que l'on doit avoir $N(f_n)\to0$.
On peut également procéder de la façon suivante : Supposons que $\forall f\in E,\quad N(f)\leqslant C\,\|f\|_\infty$ alors en évaluant cette inégalité en $f=f_n$, on obtient
$$1+\frac1n\leqslant C\times\frac1n\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}(1+\frac1n)\leqslant C\times\lim_{n\to+\infty}\frac1n\Rightarrow1\leqslant0$$
ce qui est impossible et les normes $\|\|_\infty$ et N se sont pas équivalentes sur E.
Nous savons qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, ce qui n'est pas le cas en dimension infinie (ce qui *est le cas de* E).
Remarque : on retrouve également que E est de dimension infinie. Procédons par l'absurde donc E est de dimension finie, alors les normes $\|\|_\infty$ et N sont nécessairement équivalentes, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, $E=C^1([0,1],\mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Correction de l'exercice 1.6 :

1. La fonction $g : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\times$, $g(\mathbb{R}_+^\times) = \mathbb{R}_-^\times$ et la fonction $h : x \mapsto \exp(x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_-^\times$ donc $h \circ g = f$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\times$. D'autre part, $f = 0$ sur $\mathbb{R}_-^\times$ donc elle est C^∞ sur $\mathbb{R}_-^\times$. Par conséquent, puisque $\mathbb{R}_+^\times$ et $\mathbb{R}_-^\times$ sont d'intersection vide, la fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}_-^\times \cup \mathbb{R}_+^\times = \mathbb{R}^\times$.

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x})$.
   Initialisation $n = 0$: $\forall x > 0, \quad f^{(0)}(x) = f(x) = \exp(-\frac{1}{x})$ et le polynôme $P_0 = 1$ convient donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie alors

$$\begin{aligned}\forall x &> 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x}) \Rightarrow (f^{(n)}(x))' = (P_n(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x}))' \\ &\Rightarrow \quad f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2}P_n(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x}) = \left(-\frac{1}{x^2}P_n'(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2}P_n(\frac{1}{x})\right)\exp(-\frac{1}{x})\end{aligned}$$

   Si l'on considère le polynôme P_{n+1} définie par

$$P_{n+1}(X) = -X^2P_n'(X) + X^2P_n(X) = X^2(P_n(X) - P_n'(X)),$$

   nous avons bien

$$\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x})$$

   donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

3. Le lecteur s'assure aisément que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ (il suffit de calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$). Pour montrer que f est de classe C^1, on se remémore le théorème de prolongement continue de la dérivée :
   si f est continue sur I, si f est C^1 sur $I\backslash\{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in I}} f'(x) = l$ alors si $l \in \mathbb{R}$, la fonction f est C^1 sur I et $f'(a) = l$, si $l = \pm\infty$ alors f est non dérivable en a et sa courbe représentative possède une asymptote verticale au point $(a, f(a))$.
   Dans notre cas, il suffit de calculer

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x^2}\exp(-\frac{1}{x}) \underset{t=1/x}{=} \lim_{t\to+\infty} -t^2\exp(-t) = \lim_{t\to+\infty}\exp(-t) = 0$$

   donc f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(0) = 0$. Je laisse le lecteur vérifier par le même procéder que f' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, ce qui implique que f est C^2 sur $\mathbb{R}_+$. Pour aller plus loin, nous allons procéder par récurrence
   Remarque : un moyen pour montrer qu'une fonction est C^∞ est de procéder par récurrence en explicitant la forme de sa dérivée $n^{ième}$. La forme de la dérivée $n^{ième}$ permettra d'exploiter un théorème de dérivation (dans notre cas, le théorème de prolongement continue de la dérivée, pour des séries, le théorème de dérivation des séries de fonctions, pour des intégrales, le théorème de Lebesgue de dérivation sous le signe intégral). Sans explicitation, il est impossible de prouveer l'hérédité : en effet, si l'on sait que f est C^n comment obtenir que f est C^{n+1} sans information ? (il ne faut pas espérer que l'écriture de f fasse quoi que ce soit pour $f^{(n)}$).
   Posons $(\mathcal{H}_n)$: f est de classe C^n sur $\mathbb{R}_+$ et $f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\end{cases}$
   Initialisation $n = 0$: f est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car elle y est C^∞) et l'on a :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\exp(-\frac{1}{x}) = \text{"}\exp(-\infty)\text{"} = 0 = f(0)$$

   donc f est bien continue (C^0) sur $\mathbb{R}_+$.
   Hérédité : Supposons que $(\mathcal{H}_n)$ soit vraie alors f est C^n sur $\mathbb{R}_+$ donc $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus $f^{(n)}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et l'on a

$$\forall x > 0, \quad (f^{(n)}(x))' = f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x})$$

   Nous pouvons dès lors calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(n+1)}(x)$ en utilisant le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ et en se rappelant que $e^{\pm t}$ impose sa limite sur tout polynôme :

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(n+1)}(x) = \lim_{x\to 0^+} P_{n+1}(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x}) \underset{t=1/x}{=} \lim_{t\to+\infty} P_{n+1}(t)\exp(-t) = \lim_{t\to+\infty}\exp(-t) = 0$$

Toutes les conditions du théorème de prolongement continue de la dérivée sont réunies. On peut dès lors affirmer que $f^{(n)}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+$, donc f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}_+$ et que $(f^{(n)})'(0) = 0 \Leftrightarrow f^{(n+1)}(0) = 0$. Puisque

$$\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x}),$$

on en déduit que f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}_+$ et

$$f^{(n+!)}(x) = \begin{cases} P_{n+!}(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

ce qui prouve que $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie et achève la récurrence.