1 Exercices

Exercice 1.1 1. Soient α un réel strictement positif et f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f' + \alpha f$ soit bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Ce résultat est-il encore vrai si $\alpha < 0$?

2. On note $E = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0\}$. Pour tout élément $f \in E$, on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad N(f) = \|f + f'\|_\infty$$

   (a) Montrer que $\|f\|_\infty$ et N_1 sont des normes sur E.
   (b) Montrer qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leqslant CN(f)$
   (c) Les normes $\|.\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 1.2 Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $f \in \mathcal{E}$, on pose $N_\infty(f) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$, $\quad N_2(f) = \sqrt{\int\limits_0^1 f(x)^2 dx}$ et $\widetilde{N}(f) = |f(0)| + \sup\limits_{x \in [0,1]} |f'(x)|$

1. Montrer que N_∞, N_2 et $\widetilde{N}$ sont des normes.
2. Montrer l'existence de deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$\forall f \in \mathcal{E}, \quad N_2(f) \leqslant C_1 N_\infty(f) \leqslant C_2 \widetilde{N}(f)$$

3. Les normes N_∞ et N_2 sont-elles équivalentes ?
4. Les normes N_∞ et $\widetilde{N}$ sont-elles équivalentes ?
5. Les normes N_2 et $\widetilde{N}$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 1.3 Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$.
Montrer qu'il $\xi \in]a,b[$ tel que

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} + \frac{(x-a)(x-b)}{2} f^{(2)}(\xi).$$

Retrouver ainsi que si $f^{(2)}$ est positive sur $[a,b]$ alors f est convexe.

Exercice 1.4 On note $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour tout élément $f \in E$, on note

$$\begin{aligned} N_1(f) &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| \\ N_2(f) &= |f(0)| + \|f + f'\|_\infty = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + f'(x)| \end{aligned}$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Poser $f' + \alpha f = g$ et en utilisant la variation de la constante, exprimer f en fonction de g. En déduire une majoration de f.
   Si $\alpha < 0$, considérer une fonction exponentielle convenable.

2. (a) Pour la seconde, on aboutit à une équation différentielle que l'on résoud et on utilise que $f(0) = 0$
   (b) Utiliser la question 1)
   (c) Essayer avec des fonctions $f_n(x) = x^n$ et en déduire une minoration de la constante recherchée

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. RAS

2. Pour la première, on majore f par sa norme $N_\infty(f)$ dans l'intégrale, pour la seconde, on utilise que $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$

3. Par l'absurde, utiliser une suite de monômes bien choisies (c'est pas compliqué) dans l'inégalité et passer à la limite

4. Par l'absurde, utiliser une suite de monômes bien choisies (c'est pas compliqué) dans l'inégalité et passer à la limite

5. LA DAME TE DIT (: =)) : Par l'absurde, utiliser une suite de monômes bien choisies (c'est pas compliqué) dans l'inégalité et passer à la limite

Indication pour l'exercice 1.3 :
Pour x fixé, appliquer Rolle à la fonction

$$\varphi(t) = f(t) - f(a)\frac{t-b}{a-b} - f(b)\frac{t-a}{b-a} - A\frac{(t-a)(t-b)}{2}$$

en choisissant A telle que $\varphi(x) = 0$.
Appliquer la formule précédente à x, y et $(1-t)x + ty$

Indication pour l'exercice 1.4 :

1. RAS

2. Montrer que $N_2 \leqslant CN_1$. Pour l'autre, s'inspirer de l'exercice 1.1. Pour cela, noté $g = f + f'$ et exprimer f à l'aide de g (voir l'égalité précédente comme une équation différentielle). En déduire une majoration de $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ en fonction de $N_2(f)$. Pour f', remarquer que $f' = (f + f') - f$, ce qui donne une majoration analogue de $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)|$

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. Posons $g = f' + \alpha f$. La fonction g est bornée et nous devons montrer que f est bornée. Pour cela, nous allons exprimer f en fonction de g en utilisant la méthode de la variation de la constante. L'équation homogène $y' + \alpha y = 0$ admet comme solutions les fonctions du type $t \mapsto Ce^{-\alpha t}$, où C est une constante. Ensuite, on cherche une solution particulière de $y' + \alpha y = g$ sous la forme $t \mapsto C(t)e^{-\alpha t}$, ce qui nous donne

$$(C(t)e^{-\alpha t})' + \alpha(C(t)e^{-\alpha t}) = g(t) \Leftrightarrow C'(t)e^{-\alpha t} + C(t)(e^{-\alpha t})' + \alpha C(t)e^{-\alpha t} = g(t)$$
$$\Leftrightarrow C'(t)e^{-\alpha t} + C(t)[\underbrace{(e^{-\alpha t})' + \alpha e^{-\alpha t}}_{=0}] = g(t) \Leftrightarrow C'(t)e^{-\alpha t} = g(t) \Leftrightarrow C'(t) = g(t)e^{\alpha t}$$
$$\underset{\text{en intégrant sur } [0,x]}{\Leftrightarrow} C(x) - C(0) = \int_0^x g(t)e^{\alpha t}dt.$$

Comme on cherche une solution particulière, on choisit $C(x) = \int_0^x g(t)e^{-\alpha t}dt$ et une solution particulière de $y' + \alpha y = g$ est donnée par

$$x \mapsto e^{-\alpha x}\int_0^x g(t)e^{\alpha t}dt$$

Par conséquent, f s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = Ce^{-\alpha x} + e^{-\alpha x}\int_0^x g(t)e^{\alpha t}dt.$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient que $f(0) = C$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = f(0)e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x}\int_0^x g(t)e^{\alpha t}dt$$

ce qui nous permet de majorer f. Si l'on note $\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |g(x)|$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| = \left|f(0)e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x}\int_0^x g(t)e^{\alpha t}dt\right| \leqslant |f(0)|\,e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x}\left|\int_0^x g(t)e^{\alpha t}dt\right| \leqslant |f(0)|\,e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x}\int_0^x |g(t)|\,e^{\alpha t}dt$$

Puisque $\alpha > 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^{-\alpha x} \leqslant e^0 = 1$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x)| \leqslant |f(0)| + e^{-\alpha x}\int_0^x \|g\|_\infty e^{\alpha t}dt \leqslant |f(0)| + \|g\|_\infty e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}dt = |f(0)| + \|g\|_\infty e^{-\alpha x}\left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_{t=0}^{t=x}$$
$$\leqslant |f(0)| + \|g\|_\infty e^{-\alpha x}\left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right] \leqslant |f(0)| + \|g\|_\infty e^{-\alpha x} \times \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \leqslant |f(0)| + \frac{\|g\|_\infty}{\alpha}$$

Par conséquent, la fonction f est bornée par $|f(0)| + \dfrac{\|g\|_\infty}{\alpha}$.
Si $\alpha < 0$, le résultat est faux. Il suffit de considérer la fonction $f(x) = e^{-\alpha x}$ alors $f' + \alpha f = 0$ qui est bornée alors que $\lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha x} = +\infty$.

2. (a) $\|\|_\infty$ est une norme:
   - **Existence :** toute fonction C^1 sur $[0, 1]$ est continue sur $[0, 1]$ donc elle y est bornée et le sup existe bien.
   - **Positivité** : évident
   - **Définie** : Si $\|f\|_\infty = 0$ alors la fonction $|f|$ est positive et majorée par 0 sur $[0, 1]$ donc elle est nulle sur $[0, 1]$ ce qui implique que $f = 0$.
   - **" Homogénéïté "** :Soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = |\lambda|\,\|f\|_\infty\,.$$

- **Inégalité triangulaire** : Soient f, g appartenant à E

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

donc la fonction $f+g$ est bornée sur $[0,1]$ par $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ qui est un réel indépendant de x, ce qui nous montre que

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

<u>N est une norme</u>:

- **Existence :** si f est C^1 sur $[0,1]$ alors f et f' sont continues sur $[0,1]$ donc $f+f'$ est continue sur $[0,1]$, ce qui implique que $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)+f'(x)|$ existe bien.
- **Positivité** : évident
- **Définie** : Si $N(f) = 0 \Leftrightarrow \|f+f'\|_\infty = 0$ alors

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) + f'(x) = 0$$

Le cours sur les équations différentielles du premier ordre linéaire montre que f est de la forme

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = Ce^{-x}.$$

En évaluant en $x=0$, on obtient $f(0) = C$, or $f(0) = 0$ car $f \in E$ donc

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = 0$$

ce qui démontre que $f = 0$

- **" Homogénéïté "** :Soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$N(\lambda f) = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x) + (\lambda f(x))'| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x) + \lambda f'(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+f'(x)| = |\lambda| \, \|f+f'\|_\infty = |\lambda| \, N(f).$$

- **Inégalité triangulaire** : Soient f, g appartenant à E

$$\begin{aligned} \forall x \quad \in \quad & [0,1], \quad |f(x)+g(x)+(f(x)+g(x))'| = |(f(x)+f'(x)) + (g(x)+g'(x))| \\ \leqslant \quad & |f(x)+f'(x)| + |g(x)+g'(x)| \leqslant N(f) + N(g) \end{aligned}$$

donc la fonction $f+g+(f+g)'$ est bornée sur $[0,1]$ par $N(f)+N(g)$ qui est un réel indépendant de x, ce qui nous montre que

$$N(f+g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)+(f(x)+g(x))'| \leqslant N(f) + N(g)$$

(b) Soit $f \in E$ donc f est de classe C^1 sur $[0,1]$, ce qui implique que la fonction $f+f'$ est bornée sur $[0,1]$. Si l'on pose $g = f+f'$, cette fonction g est bornée par $\|f+f'\|_\infty = N(f)$ et en utilsant la preuve de la question 1, qui reste valable en remplaçant $\mathbb{R}$ par l'intervalle $[0,1]$, on a la majoration suivante :

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x)| \leqslant \underbrace{|f(0)|}_{=0 \text{ car } f\in E} + \frac{\sup_{t\in[0,1]} |g(t)|}{1} = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)+f'(t)| = N(f).$$

La fonction f est bornée sur $[0,1]$ par le réel $N(f)$ qui est indépendant de x donc

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leqslant N(f)$$

(c) Pour que les deux normes soient équivalentes sur E, il suffit, d'après la question précédente, de savoir s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que

$$\forall f \in E, \quad N(f) \leqslant C \, \|f\|_\infty$$

On considère, pour tout entier n, la fonction $f_n \in E$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = x^n$$

Cette fonction est croissante positive sur $[0,1]$ et $f_n(1) = 1$ donc

$$\|f_n\|_\infty = 1.$$

D'autre part,

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \in [0,1], \quad f_n'(x) = x^n + nx^{n-1}.$$

La fonction $f_n + f_n'$ est clairement croissante positive sur $[0,1]$ et $(f_n + f_n')(1) = 1 + n$ donc

$$\forall n \geqslant 1, \quad N(f_n) = 1 + n.$$

Si une majoration $\forall f \in E, \quad N(f) \leqslant C \|f\|_\infty$ existe, alors en l'évaluant en $f = f_n$ avec $n \geqslant 1$, on obtient

$$\forall n \geqslant 1, \quad 1 + n \leqslant C \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (1+n) \leqslant C \Rightarrow +\infty \leqslant C$$

ce qui est absurde donc il n'existe aucune constante réelle C telle que $N(f) \leqslant C \|f\|_\infty$.
Conclusion : les normes $\|\|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes sur E.

Correction de l'exercice 1.2 :

1. N_∞ est une norme:
   - **Existence :** toute fonction C^1 sur $[0,1]$ est continue sur $[0,1]$ donc elle y est bornée et le sup existe bien.
   - **Positivité** : évident
   - **Définie** : Si $\|f\|_\infty = 0$ alors la fonction $|f|$ est positive et majorée par 0 sur $[0,1]$ donc elle est nulle sur $[0,1]$ ce qui implique que $f = 0$.
   - **" Homogénéïté "** :Soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

   $$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = |\lambda| \|f\|_\infty.$$

   - **Inégalité triangulaire** : Soient f, g appartenant à E

   $$\forall x \in [0,1], \quad |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

   donc la fonction $f + g$ est bornée sur $[0,1]$ par $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ qui est un réel indépendant de x, ce qui nous montre que

   $$\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

   N_2 est une norme:
   - **Existence :** si f est C^1 sur $[0,1]$ alors f est continue sur $[0,1]$ donc f^2 est continue et positive sur le segment $[0,1]$, ce qui implique qu'elle est intégrable sur $[0,1]$ et que son intégrale $\int_0^1 (f(t))^2 dt$ est positive. La racince carrée est bien définie, ce qui justifie que $N_2(f)$ existe bien.
   - **Positivité** : Cela découle des résultats de l'existence (et toute racine carrée est positive)
   - **Définie** : Si $N_2(f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(t))^2 dt = 0$. La fonction f^2 est continue, positive, d'intégrale nulle donc elle est nulle, ce qui montre que

   $$\forall x \in [0,1], \quad (f(x))^2 = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1], \quad f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$$

   - **" Homogénéïté "** :Soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

   $$N_2(\lambda f) = \sqrt{\int_0^1 (\lambda f(t))^2 dt} = \sqrt{\lambda^2 \int_0^1 (f(t))^2 dt} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt} = |\lambda| \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt} = |\lambda| N_2(f).$$

   - **Inégalité triangulaire** : Soient f, g appartenant à E, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les intégrales, on a

   $$\begin{aligned}
   (N_2(f+g))^2 &= \int_0^1 (f(t) + g(t))^2 dt = \int_0^1 (f(t))^2 dt + \int_0^1 (g(t))^2 + 2 \int_0^1 f(t)g(t)dt \leqslant \int_0^1 (f(t) + g(t))^2 dt \\
   &\leqslant \int_0^1 (f(t))^2 dt + \int_0^1 (g(t))^2 + 2 \sqrt{\int_0^1 (f(t)^2) dt} \sqrt{\int_0^1 (g(t)^2) dt} \\
   &= (N_2(f))^2 + (N_2(g))^2 + 2N_2(f)N_2(g) = (N_2(f) + N_2(g))^2 \\
   &\Rightarrow (N_2(f+g))^2 \leqslant (N_2(f) + N_2(g))^2 \underset{N_2 \geqslant 0}{\Leftrightarrow} N_2(f+g) \leqslant N_2(f) + N_2(g)
   \end{aligned}$$

$\widetilde{N}$ est une norme:

- **Existence :** si f est C^1 sur $[0,1]$ alors f' est continue sur $[0,1]$ donc elle est bornée sur $[0,1]$ et $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)+f'(x)|$ existe bien.
- **Positivité** : évident
- **Définie** : Soit $f \in E$, on a
$$\widetilde{N}(f)=0 \Leftrightarrow |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = 0 \Leftrightarrow f(0) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = 0 \Leftrightarrow f(0)=0 \text{ et } \forall x\in[0,1],\quad f'(x)=0$$
Ainsi, f est constante sur l'intervalle $[0,1]$ et comme $f(0)=0$, cette constante est nulle, ce qui implique que $f=0$
- **" Homogénéïté "** :Soit $\lambda\in\mathbb{R}$:
$$\widetilde{N}(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f'(x)| = |\lambda|\,|f(0)| + |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |\lambda| \left(|f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|\right) = |\lambda|\,\widetilde{N}(f).$$
- **Inégalité triangulaire** : Soient f, g appartenant à E
$$\begin{array}{lll} (1) & : & |(f+g)(0)| = |f(0)+g(0)| \leqslant |f(0)|+|g(0)| \\ \forall x & \in & [0,1],\quad |(f(x)+g(x))'| = |f'(x)+g'(x)| \leqslant |f'(x)|+|g'(x)| \leqslant \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |g'(t)| \end{array}$$
La fonction $(f+g)'$ est est bornée sur $[0,1]$ par $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |g'(t)|$ qui est un réel indépendant de x, ce qui nous montre que
$$(2) : \sup_{x\in[0,1]} |(f(x)+g(x))'| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g'(t)|$$
En ajoutant les inégalités (1) et (2), on obtient
$$\begin{aligned} \widetilde{N}(f+g) &= |f(0)+g(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |(f(x)+g(x))'| \leqslant |f(0)|+|g(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g'(t)| \\ &= |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| + |g(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |g'(t)| = \widetilde{N}(f) + \widetilde{N}(g) \end{aligned}$$

2. Soit $f\in\mathcal{E}$, alors la première inégalité résulte de
$$N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt} \leqslant \sqrt{\int_0^1 (N_\infty(f))^2 dt} = \sqrt{(N_\infty(f))^2 \int_0^1 dt} = \sqrt{(N_\infty(f))^2} \underset{N_\infty \geqslant 0}{=} N_\infty(f)$$
donc $N_2(f) \leqslant N_\infty(f)$.
Pour la seconde inégalité, on utilise que $\forall x\in[0,1],\quad f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt$, ce qui nous donne
$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)dt\right| \leqslant |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\,dt \leqslant |f(0)| + \int_0^x \underbrace{\sup_{z\in[0,1]} |f'(z)|}_{\text{indépendant de } t} dt \\ &= |f(0)| + \sup_{z\in[0,1]} |f'(z)| \int_0^x dt = |f(0)| + \sup_{z\in[0,1]} |f'(z)|\, x \underset{x\in[0,1]}{\leqslant} |f(0)| + \sup_{z\in[0,1]} |f'(z)| = \widetilde{N}(f) \end{aligned}$$
On vien de montrer que la fonction f est bornée par le réel $\widetilde{N}(f)$, qui est indépendant de x donc
$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leqslant \widetilde{N}(f)$$

3. Puisque $\forall f\in\mathcal{E}$, $N_2(f)\leqslant N_\infty(f)$ l'équivalence des normes N_∞ et N_2 équivaut à l'existence d'une constante C telle que $\forall f\in\mathcal{E}$, $N_\infty(f)\leqslant CN_2(f)$. Testons cette inégalité sur la fonction $f_n\in E$ définie par $f_n(x)=x^n$, où n est un entier naturel quelconque. Un calcul simple laissé au lecteur montre que $N_\infty(f_n)=1$ et $N_2(f_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, ce qui nous donne
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad N_\infty(f_n)\leqslant CN_2(f_n) \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\quad 1\leqslant \frac{C}{\sqrt{2n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} 1 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{C}{\sqrt{2n+1}} \Leftrightarrow 1\leqslant 0$$
Cette dernière inégalité étant absurde, on en déduit qu'il n'existe aucune constante C telle que $\forall f\in\mathcal{E}$, $N_\infty(f)\leqslant CN_2(f)$ et les normes N_∞ et N_2 ne sont pas équivalentes.

4. Puisque $\forall f \in \mathcal{E}$, $N_\infty(f) \leqslant \widetilde{N}(f)$, l'équivalence des normes N_∞ et $\widetilde{N}$ équivaut à l'existence d'une constante C telle que $\forall f \in \mathcal{E}$, $\widetilde{N}(f) \leqslant CN_\infty(f)$. Testons cette inégalité sur la fonction $f_n \in E$ définie par $f_n(x) = x^n$, où n est un entier quelconque. Un calcul simple laissé au lecteur montre que $N_\infty(f_n) = 1$ et $\widetilde{N}(f_n) = n$, ce qui nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \widetilde{N}(f_n) \leqslant CN_\infty(f_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leqslant C \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n \leqslant C \Leftrightarrow +\infty \leqslant C$$

Cette dernière inégalité étant absurde, on en déduit qu'il n'existe aucune constante C telle que $\forall f \in \mathcal{E}$, $\widetilde{N}(f) \leqslant CN_\infty(f)$ et les normes N_∞ et $\widetilde{N}$ ne sont pas équivalentes.

5. Puisque $\forall f \in \mathcal{E}$, $N_2(f) \leqslant N_\infty(f) \leqslant \widetilde{N}(f)$, on en déduit que $N_2(f) \leqslant \widetilde{N}(f)$. L'équivalence des normes N_∞ et $\widetilde{N}$ équivaut alors à l'existence d'une constante C telle que $\forall f \in \mathcal{E}$, $\widetilde{N}(f) \leqslant CN_2(f)$. Testons cette inégalité sur la fonction $f_n \in E$ définie par $f_n(x) = x^n$, où n est un entier quelconque (pour changer). Un calcul simple laissé au lecteur montre que $N_2(f_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ et $\widetilde{N}(f_n) = n$, ce qui nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \widetilde{N}(f_n) \leqslant CN_2(f_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leqslant \frac{C}{\sqrt{2n+1}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} n \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{C}{\sqrt{2n+1}} \Leftrightarrow +\infty \leqslant 0$$

Cette dernière inégalité étant absurde, on en déduit qu'il n'existe aucune constante C telle que $\forall f \in \mathcal{E}$, $\widetilde{N}(f) \leqslant CN_2(f)$ et les normes N_2 et $\widetilde{N}$ ne sont pas équivalentes.

Correction de l'exercice 1.3 :

Fixons $x \in [a, b]$. Classiquement dans ce genre d'exercices, on introduit la fonction

$$\forall t \in [a, b], \quad \varphi(t) = f(t) - (f(a)\frac{t-b}{a-b} + f(b)\frac{t-a}{b-a} + \frac{(t-a)(t-b)}{2}A),$$

où A sera une constante convenablement choisi.

Remarque : On constate que $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = 0$. Le théorème de Rolle montre qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Puisque

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(a)}{a-b} - \frac{f(b)}{b-a} - (x - \frac{a+b}{2})A = f'(x) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b} - (x - \frac{a+b}{2})A$$

On sait que $\varphi'(c) = 0$ mais pour aboutir à une dérivée seconde, il est souhaitable d'avoir un autre point point qui annule φ. C'est là qu'intervient le choix de la constante A. Nous allons choisir un point x_0 quelconque, à priori de $]a, b[$ (pour qu'il soit distinct de a et b) tel que $\varphi(x_0) = 0$. Nous appliquerons alors Rolle sur $[a, x_0]$ et sur $[x_0, b]$, ce qui nous donnera 2 réels c et d nécessairement distincts puis nous appliquerons Rolle sur $[c, d]$ et notre dérivée seconde apparaitra toute seule. Or il nous est demandé d'avoir l'égalité

$$f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} + \frac{(x-a)(x-b)}{2}f^{(2)}(\xi)$$

et comme il est souhaitable qu'à terme nous ayons $A = f^{(2)}(\xi)$, l'égalité ci-dessus se traduit alors par $\varphi(x) = 0$, ce que nous allons exiger dans la suite.

Supposons que $x \in]a, b[$ (en n'oubliant pas que x est fixé et que la variable est t) et choisissons A tel que $\varphi(x) = 0$, cela est toujours possible puisque

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-a)(x-b)}{2}A = f(x) - (f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$$

Puisque $x \in]a, b[$, le facteur $\dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$ est non nul, donc nous sommes en droit d'effectuer la division dans l'égalité ci-dessus et nous fournit une unique valeur possible. Nous n'allons pas explicter la valeur de A (cela ne servira pas dans la suite). On suppose désormais que A a été choisi tel que $\varphi(x) = 0$ (je rappelle de nouveau que x est fixé et t varie).

Par définition $\varphi(x) = 0$ et par un calcul direct $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Puisque $\varphi(a) = \varphi(x)$, le théorème de Rolle appliqué à la fonction $t \mapsto \varphi(t)$ montre l'existence d'un réel $c \in]a, x[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. D'autre part, puisque $\varphi(x) = \varphi(b)$, le théorème de Rolle appliqué à la fonction $t \mapsto \varphi(t)$ montre également l'existence d'un réel $d \in]x, b[$ tel que $\varphi'(d) = 0$. Par construction, on a $c < x < d$ donc les réels c et d sont distincts et comme $\varphi'(c) = \varphi'(d)$, une nouvelle application du théorème de Rolle à la fonction $t \mapsto \varphi'(t)$ montre l'existence d'un réel $\xi \in]c, d[\subset]a, b[$ tel que $\varphi^{(2)}(\xi) = 0$. Or un calcul direct nous donne la dérivée seconde de φ, qui est donnée par

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(a)-f(b)}{a-b} - (x - \frac{a+b}{2})A, \quad \varphi^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) - A$$

Par conséquent, la condition $\varphi^{(2)}(\xi)=0$ est équivalente à $A=f^{(2)}(\xi)$, donc la fonction φ s'écrit

$$\forall t\in[a,b],\quad \varphi(t)=f(t)-(f(a)\frac{t-b}{a-b}+f(b)\frac{t-a}{b-a}+\frac{(t-a)(t-b)}{2}f^{(2)}(\xi))$$

et nous savons que $\varphi(x)=0$ donc on obtient l'égalité recherchée

$$\varphi(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(a)\frac{x-b}{a-b}+f(b)\frac{x-a}{b-a}+\frac{(x-a)(x-b)}{2}f^{(2)}(\xi))$$

Il reste à traiter le cas où $x=a$ ou $x=b$. Pour $x=a$, on constate que pour tout $\xi\in[a,b]$, on a

$$f(a)\frac{a-b}{a-b}+f(b)\frac{a-a}{b-a}+\frac{(a-a)(a-b)}{2}f^{(2)}(\xi))=f(a)$$

ce qui implique que l'égalité souhaitée est valable pour tout $\xi\in[a,b]$. De même pour $x=b$.
Supposons désormais que $f^{(2)}$ est positive sur $[a,b]$. Soient x,y deux réels appartenant à l'intervalle $[a,b]$ et t un réel appartenant à $[0,1]$. Les trois réels $x,y,(1-t)x+ty$ appartenant à $[a,b]$, on est assuré de l'existence de trois réels ξ_1,ξ_2,ξ_3 tels que

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a)\frac{x-b}{a-b}+f(b)\frac{x-a}{b-a}+\frac{(x-a)(x-b)}{2}f^{(2)}(\xi_1)\\
f(y) &= f(a)\frac{y-b}{a-b}+f(b)\frac{y-a}{b-a}+\frac{(y-a)(y-b)}{2}f^{(2)}(\xi_2)\\
(1)\quad f((1-t)x+ty) &= f(a)\frac{(1-t)x+ty-b}{a-b}+f(b)\frac{(1-t)x+ty-a}{b-a}+\frac{((1-t)x+ty-a)((1-t)x+ty-b)}{2}f^{(2)}(\xi)
\end{aligned}$$

On en déduit que l'on a

$$\begin{aligned}
(1-t)f(x)+tf(y) &= (1-t)\left(f(a)\frac{x-b}{a-b}+f(b)\frac{x-a}{b-a}+\frac{(x-a)(x-b)}{2}f^{(2)}(\xi_1)\right)\\
&\quad +t\left(f(a)\frac{y-b}{a-b}+f(b)\frac{y-a}{b-a}+\frac{(y-a)(y-b)}{2}f^{(2)}(\xi_2)\right)\\
&= f(a)\frac{(1-t)x-(1-t)b}{a-b}+f(b)\frac{(1-t)x-(1-t)a}{b-a}+(1-t)\frac{(x-a)(x-b)}{2}f^{(2)}(\xi_1)\\
&\quad +f(a)\frac{ty-tb}{a-b}+f(b)\frac{ty-ta}{b-a}+t\frac{(y-a)(y-b)}{2}f^{(2)}(\xi_2)
\end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore

$$(2)\quad (1-t)f(x)+tf(y)=f(a)\frac{(1-t)x+ty-b}{a-b}+f(b)\frac{(1-t)x+ty-a}{b-a}+(1-t)\frac{(x-a)(x-b)}{2}f^{(2)}(\xi_1)+t\frac{(y-a)(y-b)}{2}f^{(2)}(\xi_2)$$

Des égalités (1) et (2), et en se rappelant que $t\in[0,1]$, que $x,y\in[a,b]$ et que $f^{(2)}$ est positive sur $[a,b]$, on obtient le calcul suivant :

$$f((1-t)x+ty)-((1-t)f(x)+tf(y))=\underbrace{(1-t)}_{\geqslant 0}\frac{\overbrace{(x-a)}^{\geqslant 0}\overbrace{(x-b)}^{\leqslant 0}}{2}\underbrace{f^{(2)}(\xi_1)}_{\geqslant 0}+\underbrace{t}_{\geqslant 0}\frac{\overbrace{(y-a)}^{\geqslant 0}\overbrace{(y-b)}^{\leqslant 0}}{2}\underbrace{f^{(2)}(\xi_2)}_{\geqslant 0}\leqslant 0$$

ce qui montre que

$$f((1-t)x+ty)\leqslant(1-t)f(x)+tf(y)$$

Cette égalité étant valable quels que soient x,y appartenant à $[a,b]$ et quel que soit t appartenant à $[0,1]$, nous pouvons affirmer que f est convexe sur $[a,b]$.

Correction de l'exercice 1.4 :

1. N_1 est une norme:

   - **Existence :** si f est C^1 sur $[0,1]$ alors f et f' sont continues sur $[0,1]$ donc f etf' sont bornées sur $[0,1]$, ce qui implique que $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$ et $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$ existent bien.
   - **Positivité** : évident

- **Définie** : Si $N_1(f) = 0 \Leftrightarrow \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = 0$ alors $\|f\|_\infty = 0$ et $\|f'\|_\infty = 0$. La première égalité implique que f est la fonction nulle sur $[0, 1]$.
- **" Homogénéïté "** :Soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

  $$N_1(\lambda f) = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)|+ \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f'(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|+|\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = |\lambda| \left(\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|+ \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|\right) = |\lambda| N_1(f)$$

- **Inégalité triangulaire** : Soient f, g appartenant à E

  $$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|$$

  donc la fonction $f + g$ est bornée sur $[0, 1]$ par $\sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|$ qui est un réel indépendant de x, ce qui nous montre que

  $$(1) : \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + g(x)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|$$

  En faisant le même raisonnement avec f' et g', on obtient que

  $$(2) : \sup_{x\in[0,1]} |f'(x) + g'(x)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g'(t)|$$

  La combinaison des égalités (1) et (2) nous donne

  $$\begin{aligned} N_1(f + g) &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + g(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x) + g'(x)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g'(t)| \\ &= \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |g'(t)| = N_1(f) + N_1(g) \end{aligned}$$

  donc on a bien $N_1(f + g) \leqslant N_1(f) + N_1(g)$.

N_2 est une norme:

- **Existence :** si f est C^1 sur $[0, 1]$ alors f et f' sont continues sur $[0, 1]$ donc $f + f'$ est continue sur $[0, 1]$, ce qui implique que $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)|$ existe bien.
- **Positivité** : évident
- **Définie** : Si $N_2(f) = 0 \Leftrightarrow \|f + f'\|_\infty = 0$ alors

  $$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) + f'(x) = 0$$

  Le cours sur les équations différentielles du premier ordre linéaire montre que f est de la forme

  $$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = Ce^{-x}.$$

  En évaluant en $x = 0$, on obtient $f(0) = C$, or $f(0) = 0$ car $f \in E$ donc

  $$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = 0$$

  ce qui démontre que $f = 0$
- **" Homogénéïté "** :Soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

  $$N_2(\lambda f) = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x) + (\lambda f(x))'| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x) + \lambda f'(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)| = |\lambda| \|f + f'\|_\infty = |\lambda| N_2(f).$$

- **Inégalité triangulaire** : Soient f, g appartenant à E

  $$\begin{aligned} \forall x &\in [0, 1], \quad |f(x) + g(x) + (f(x) + g(x))'| = |(f(x) + f'(x)) + (g(x) + g'(x))| \\ &\leqslant |f(x) + f'(x)| + |g(x) + g'(x)| \leqslant N_2(f) + N_2(g) \end{aligned}$$

  donc la fonction $f + g + (f + g)'$ est bornée sur $[0, 1]$ par $N(f) + N(g)$ qui est un réel indépendant de x, ce qui nous montre que

  $$N_2(f + g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + g(x) + (f(x) + g(x))'| \leqslant N_2(f) + N_2(g)$$

2. Une majoration est évidente. Soit $f \in E$, on a

$$(1) \quad : \quad |f(0)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \leqslant N_1(f)$$

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x)+f'(x)| \leqslant |f(x)|+|f'(x)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| = N_1(f)$$

La fonction $f+f'$ étant majorée par le réel $N_1(f)$, qui est indépendant de x, on en déduit que

$$(2) : \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+f'(x)| \leqslant N_1(f)$$

En sommant les inégalités (1) et (2), on obtient

$$N_2(f) = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+f'(x)| \leqslant 2N_1(f)$$

Conclusion :

$$(3) : \forall f \in E, \quad N_2(f) \leqslant 2N_1(f).$$

La majoration précédente étant valable quel que soit $f \in E$, l'équivalence des normes N_1 et N_2 est alors équivalente à l'existence d'une constante C telle que $\forall f \in E, \quad N_1(f) \leqslant CN_2(f)$. Nous avons vu dans l'exerice 1.1 qu'une majoration de $f+f'$ et de $f(0)$ entraine une majoration de f. Par conséquent, si $f+f'$ est majorée alors f est majorée par un majorant dépendant que de $f+f$ et $f(0)$ donc $f' = (f+f')-f$ aussi, cela nous incite, à priori, à croire à l'existence d'une majoration du type $N_2 \leqslant CN_1$. Donnons en la preuve rigoureuse.
On pose $g = f'+f$. Puisque f est C^1 sur $[0,1]$, la fonction g est bornée sur $[0,1]$ et on a même

$$(4) : \sup_{z\in[0,1]} |g(z)| = \sup_{z\in[0,1]} |f(z)+f'(z)|$$

Exprimons f en fonction de g en utilisant la méthode de la variation de la constante. L'équation homogène $y'+y=0$ admet comme solutions les fonctions du type $t \mapsto Ae^{-t}$, où A est une constante. Ensuite, on cherche une solution particulière de $y'+y=g$ sous la forme $t \mapsto A(t)e^{-t}$, ce qui nous donne

$$(A(t)e^{-t})' + (A(t)e^{-t}) = g(t) \Leftrightarrow A'(t)e^{-t} + A(t)(e^{-t})' + A(t)e^{-t} = g(t)$$
$$\Leftrightarrow A'(t)e^{-t} + A(t)\underbrace{[(e^{-t})'+e^{-t}]}_{=0} = g(t) \Leftrightarrow A'(t)e^{-t} = g(t) \Leftrightarrow A'(t) = g(t)e^{t}$$

$$\underset{\text{en intégrant sur } [0,x]}{\Leftrightarrow} A(x)-A(0) = \int_0^x g(t)e^t dt.$$

Comme on cherche une solution particulière, on choisit $A(x) = \int_0^x g(t)e^{-t}dt$ et une solution particulière de $y'+y=g$ est donnée par

$$x \mapsto e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt$$

Par conséquent, f s'écrit

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = Ae^{-x} + e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt.$$

En évaluant en $x=0$, on obtient que $f(0)=A$ donc

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = f(0)e^{-x} + e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt$$

ce qui nous permet de majorer f. En utilisant l'inégalité (4), on a :

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x)| = \left| f(0)e^{-x} + e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt \right| \leqslant |f(0)|\underbrace{e^{-x}}_{\leqslant 1} + \underbrace{e^{-x}}_{\leqslant 1}\left|\int_0^x g(t)e^t dt\right| \leqslant |f(0)| + \int_0^x |g(t)|\underbrace{e^t}_{\leqslant e} dt$$
$$\leqslant |f(0)| + e\int_0^x \sup_{z\in[0,1]} |f(z)+f'(z)|\, dt \leqslant |f(0)| + e\sup_{z\in[0,1]} |f(z)+f'(z)| \underbrace{\int_0^x dt}_{=x\leqslant 1} \leqslant |f(0)| + e\sup_{z\in[0,1]} |f(z)+f'(z)|$$
$$\leqslant e\,|f(0)| + e\sup_{z\in[0,1]} |f(z)+f'(z)| = e(|f(0)| + \sup_{z\in[0,1]} |f(z)+f'(z)|) = eN_2(f)$$

La fonction f est donc bornée par $eN_2(f)$, qui est une constante indépendante de x, donc on obtient la majoration

$$(5) : \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leqslant eN_2(f).$$

D'autre part, puisque $f' = (f + f') - f$, on a

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)| + \underbrace{\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|}_{\leqslant eN_2(f)} \\ &\leqslant \underbrace{|f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)|}_{=N_2(f)} + eN_2(f) = (1+e)N_2(f)\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(6) : \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leqslant (1+e)N_2(f).$$

L'addition des inégalités (5) et (6) nous donne

$$N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leqslant eN_2(f) + (1+e)N_2(f) = (1+2e)N_2(f).$$

Cette inégalité étant valable pour toute fonction f de E, on a montré que

$$(7) : \forall f \in E, \quad N_1(f) \leqslant (1+2e)N_2(f)$$

Les inégalités (3) et (7) nous permettent d'affirmer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur E.
Conclusion : en dimension infinie, certaines distinctes peuvent être équivalentes !