1 Exercices

Exercice 1.1 1. Etudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-x\ln x)^n}{n!}$ sur $]0,1]$.

2. Montrer que $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^n}$.

Exercice 1.2 On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer que f est solution d'une équation différentielle simple.
   En déduire une autre expression de f à l'aide de fonctions élémentaires

Exercice 1.3 On pose $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\exp(-n^2t^2)}{n^2+1}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$
3. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^\times$.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Etudier les variations de $x \mapsto -x\ln x$ sur $]0,1]$, en déduire $\sup\limits_{x\in]0,1]} |x\ln x|$ et montrer la convergence normale de la série sur $]0,1]$
2. Utiliser que $e^t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n!}$ et $\dfrac{1}{x^x} = \exp(-x\ln x)$, appliquer le théorème de permutation série-intégrale sur un segment (pensez à prolonger par continuité) puis Procéder par intégration par partie successives pour calculer $\int\limits_0^1 (-x)^n(\ln x)^n dx$

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Eliminer les cas de divergence grossière, pour l'intervalle restant, majorer le terme général par e^{-nx}
2. Montrer la convergence normale sur les intervalles $[a,+\infty[$ $(a>0)$ et utiliser le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions
3. Justifier la dérivabilité sur les intervalles $[a,+\infty[$ (par convergence normale et théorème de dérivations des séries de fonctions), expliciter la dérivée puis utiliser que $\dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Pour résoudre l'équation différentielle, procéder par variations de la constante.

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. La convergence normale est évidente sur $\mathbb{R}$ et appliquer le théorème de continuité d'une somme de série.
2. Montrer la convergence normale sur tout ensemble du type $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$ avec $a>0$ (autrement dit $x^2 \geqslant a^2$) et utiliser le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions.
3. Fixer $a>0$ et procéder par récurrence en considérant l'hypothèse de récurrence
   $\mathcal{P}_k$: " f est de classe C^k sur $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$ et $f^{(k)}(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_{k,n}(t)\dfrac{\exp(-n^2t^2)}{n^2+1}$, où $P_{k,n}$ est un polynôme en t et n "
   Pour l'hérédité, appliquer le théorème de dérivabilité de la somme d'une série

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)