

1 Exercices

Exercice 1.1 On considère la courbe $(\Gamma) : \begin{cases} x = 3 \cos t + 3 \cos 2t + \cos 3t \\ y = 3 \sin t + 3 \sin 2t + \sin 3t \end{cases}$

1. Construire (Γ) et calculer sa longueur
2. Déterminer, lorsque cela est possible, la courbure

Exercice 1.2 Construire la courbe $\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 + t^2 \\ t \\ 1 + t^2 \end{array} \right)$

1. Déterminer la longueur de la courbe
2. Expliciter le repère de Serret Frenet et déterminer le rayon de courbure en tout point

Exercice 1.3 1. Tracer la courbe paramétrée définie par :

$$x(t) = \int_0^t \cos(2u) \sin(u) du, \quad y(t) = \int_0^t \sin(2u) \cos(u) du.$$

2. Déterminer sa longueur et sa courbure en tout point

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Utiliser la 2π -périodicité ainsi que la parité pour se ramener à l'intervalle $[0, \pi]$. Pour déterminer le signe de x' et celui de y' , se ramener à résoudre les équations $x' = 0$ et $y' = 0$. Pour la seconde, $\cos kx$ est un polynôme en $\cos x$ et pour la première, $\sin kx$ est le produit de $\sin x$ par un polynôme en $\cos x$.
Pour la longueur, en utilisant le développement direct ainsi que les identités classiques, on aboutit à $ds = 6(1 + \cos t)$
2. Utiliser l'expression de la courbure en coordonnées cartésiennes.

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. En utilisant au maximum les factorisations dans le ds^2 , on aboutit à $ds = \frac{1}{1+x^2}$
2. Il suffit de revoir la définition du repère de Serret Frenet

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Ne pas hésiter à calculer les intégrales ($\cos a \sin b = \dots + \dots$ et $\sin a \cos b = \dots + \dots$). Pour les dérivées, inutile de redériver les nouvelles expressions, il suffit de voir que x et y sont des primitives de ...
2. x et y sont des dérivées, donc le ds^2 s'obtient en une ligne. Pour la courbure, revoir l'expression de la courbure en coordonnées cartésiennes

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)