1 Exercices

Exercice 1.1 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui est défini par

$$f(x,y,z) = (8x - 6y + 5z, 14x - 11y + 10z, 7x - 6y + 6z)$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique
2. Déterminer une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$.
3. Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ sont en somme directe.
4. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$, montrer que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$
5. En déduire A^n lorsque $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.2 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \ker(u - I)^2 \oplus \ker(u + I)^2$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$
4. Déterminer toutes les matrices commutant avec A

Exercice 1.3 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (x + 6y + 3z, 3x + 4y + 3z, 3x + 6y + z)$

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2. Montrer que $\ker(f + 2\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f - 10\,\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $mat(f, \mathcal{B}) = \mathrm{diag}(-2, -2, 10)$
4. Calculer $f^n(x,y,z)$ en fonction de n, x, y, z.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Effectuer le produit de A (coefficients $a, b, ...$) par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour obtenir A
2. Ramener l'équation $f(X) = X$ à un système et le résoudre par le pivot de Gauss
3. F et G sont en somme direct ssi $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = 3$
4. Pour construire la matrice, il faut exprimer $f(e_i)$ en fonction de e_1, e_2, e_3, où les $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour $i = 1$ et 2, c'est immédiat car $f(e_i) = e_i$, pour le dernier, calculer explicitement $f(e_3)$ puis chercher trois réels a, b, c tels que $f(e_3) = ae_1 + be_2 + ce_3$, a, b, c étant alors les coordonnées de $f(e_3)$ dans la base $\mathcal{B}$
5. Si B est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, on a $A = PBP^{-1}$, où P est la matrice de changement de base de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$. Ensuite, $A^n = PB^nP^{-1}$ et pour calculer B^n, écrire B sous la forme $D + N$, où D est diagonale, N nilpotente et utiliser la formule du binôme (il faut donc vérifier que $DN = ND$)

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Déterminer le rang de $(u - I)^2$ et $(u + I)^2$, ce qui fournit la dimension de chaque noyau. Ensuite, caractériser l'appartenance à chaque espace par un système afin de déterminer l'intersection des noyaux puis utiliser la caractérisation des sous-espaces supplémentaires
2. Faut pas pousser mamie dans les orties, ... surtout qu'elle est en short et qu'il fait froid :=) C'est ....déterminant
3. Ecrire $f(e_i)$ en fonction des e_j (et non pas placer les coordonnées des $f(e_i)$ dans la base canonique), quitte à résoudre le système $f(e_i) = \sum_j a_j e_j$ par rapport aux a_j
4. Les matrices d'un même endomorphisme dans des bases distinctes sont semblables. Ecrire alors $A = PBP^{-1}$, où B est la matrice obtenue dans 3), écrire une matrice M commutant avec A sous la forme $M = PM'P^{-1}$ et montrer alors que $BM' = M'B$, écrire le système de 16 équations à 16 inconnues (les coefficients de M'). Ne pas s'inquiéter, c'est très simple

Indication pour l'exercice 1.3 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (x+6y+3z, 3x+4y+3z, 3x+6y+z)$

1. Effectuer le produit de A (coefficients $a, b, ...$) par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour obtenir A
2. Déterminer le rang de $f + 2\,\mathrm{Id}$ et $f - 10\,\mathrm{Id}$, ce qui fournit la dimension de chaque noyau. Ensuite, caractériser l'appartenance à chaque espace par un système afin de déterminer l'intersection des noyaux puis utiliser la caractérisation des sous-espaces supplémentaires
3. Regrouper une base de chaque espace $\ker(f + 2\,\mathrm{Id})$ et $\ker(f - 10\,\mathrm{Id})$
4. Les matrices d'un même endomorphisme dans des bases distinctes sont semblables. Ecrire alors $A = PBP^{-1}$, où B est la matrice obtenue dans 3) donc $A^n = PB^nP^{-1}$, ce qui fournit les neuf coefficients de A^n

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)