1 Exercices

Exercice 1.1 Etudier la diagonalisabilité de $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -4 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ Effectuer la réduction le cas échéant

Exercice 1.2 On considère la suite $u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n})$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n}$ puis $\lim_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 1.3 Etudier la diagonalisabilité de $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Effectuer la réduction le cas échéant.

Exercice 1.4 Calculer $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)(4+t^2)} dt$

Exercice 1.5 Etudier la diagonalisabilité de $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Effectuer la réduction le cas échéant

Exercice 1.6 Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{k}{n}) \sin(\frac{k+1}{n})$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Pensez à factoriser au mieux le polynôme caractéristique (par combinaison judicieuse de lignes ou de colonnes, faire apparaitre des lignes ou colonne de zéro, ou dans un premier temps, une ligne ou une colonne d'une même expression, puis factoriser et faire apparaitre des zéros)par apparition de facteur commun)
On obtiendra deux valeurs propres -2 et 4 et la matrice ne sera pas diagonalisable.
Pour la réduction, il faut trigonaliser : pour chaque valeur propre λ posant problème (i.e. dont la dimension de l'espace propre n'est pas égal à la multiplicité dans le polynôme caractéristique) on déterminera l'espace propre $E_\lambda = \mathrm{Vect}(e_\lambda)$ puis on déterminera un vecteur f_λ de $\ker(A-\lambda I)^2$ qui vérifie $Af_\lambda = \lambda f_\lambda + e_\lambda$ (pour obtenir des blocs)

Indication pour l'exercice 1.2 : Montrer que $\ln \sqrt[n]{u_n}$ est la somme de Riemann d'une certaine fonction sur $[0,1]$ et en déduire la limite recherchée. Pour la seconde, majorée $\sqrt[n]{u_n}$ par un réel convenable puis utiliser le théorème d'encadrement pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Indication pour l'exercice 1.3 : Pensez à factoriser au mieux le polynôme caractéristique (par combinaison judicieuse de lignes ou de colonnes, faire apparaitre des lignes ou colonne de zéro, ou dans un premier temps, une ligne ou une colonne d'une même expression, puis factoriser et faire apparaitre des zéros)par apparition de facteur commun)
On obtiendra deux valeurs propres -2 et 10 et la matrice sera diagonalisable.

Indication pour l'exercice 1.4 : Un vague souvenir me dit qu'il s'agit d'une fraction rationnelle donc la décomposition en éléments simples pointe son nez. Vite, le cours de Sup.

Indication pour l'exercice 1.5 : Pensez à factoriser au mieux le polynôme caractéristique (par combinaison judicieuse de lignes ou de colonnes, faire apparaitre des lignes ou colonne de zéro, ou dans un premier temps, une ligne ou une colonne d'une même expression, puis factoriser et faire apparaitre des zéros)par apparition de facteur commun)
On obtiendra une seule valeur propre 1 et la dimension de l'espace propre sera égale à -2.
Pour la réduction, trigonaliser : on déterminera l'espace propre $E_{-2} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ puis on déterminera un vecteur e_3 de $\ker(A+2\lambda I)^3 = \mathbb{R}^3$ qui vérifie $Ae_3 = -2e_3 + e_2$ (pour obtenir des blocs)

Indication pour l'exercice 1.6 : Cela ressemble bigrement à une somme de Riemann, mais le terme $k+1$ est génant. Pour le contourner, utiliser la formule de duplication $\sin(a+b)$ pour montrer que cette somme de Riemann "tordue" est une combinaison linéaire de deux véritables sommes de Riemann

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.4 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.5 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.6 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)