1 Exercices

Exercice 1.1 Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathcal{D}_f$?

Exercice 1.2 Rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln n}{n} x^n$ et étude de la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence

Exercice 1.3 On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Etudier la continuité de F.
3. Donner une relation entre $F(x)$ et $F(\frac{1}{x})$.
4. Limites, puis équivalents aux bornes de l'intervalle de définition.

Exercice 1.4 On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t+1} dt$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Développement en série entière de f.
3. La fonction f est-elle C^∞ sur $\mathbb{R}$?

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathcal{D}_f$?

Indication pour l'exercice 1.2 : Rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\ln n}{n} x^n$ et étude de la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence

Indication pour l'exercice 1.3 : On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Etudier la continuité de F.
3. Donner une relation entre $F(x)$ et $F(\frac{1}{x})$.
4. Limites, puis équivalents aux bornes de l'intervalle de définition.

Indication pour l'exercice 1.4 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t+1} dt$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Développement en série entière de f.
3. La fonction f est-elle C^∞ sur $\mathbb{R}$?

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathcal{D}_f$?

Correction de l'exercice 1.2 : Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n} x^n$ et étude de la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence

Correction de l'exercice 1.3 : On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Etudier la continuité de F.
3. Donner une relation entre $F(x)$ et $F(\frac{1}{x})$.
4. Limites, puis équivalents aux bornes de l'intervalle de définition.

Correction de l'exercice 1.4 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t+1} dt$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Développement en série entière de f.
3. La fonction f est-elle C^∞ sur $\mathbb{R}$?