1 Exercices

Exercice 1.1 On note $S_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx$ et $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$. Calculer $T_n(x)$

Exercice 1.2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}$ puis l'équation $\arccos x = \arcsin 2x$

Exercice 1.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^3 + \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^2 + \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) + 1 = 0$

Exercice 1.4 Etudier la fonction $x \mapsto \arctan \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

Exercice 1.5 On note $\beta = \exp(\frac{2i\pi}{7})$, $S = \beta + \beta^2 + \beta^4$ et $T = \beta^3 + \beta^5 + \beta^6$.

1. Justifier que S et T sont conjugués puis montrer que $\operatorname{Im} S > 0$.
2. Calculer $S + T$ et ST. En déduire les valeurs de S et T.

Exercice 1.6 Etudier la fonction $x \mapsto \arccos \frac{1-x}{1+x} + \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Pour S_n, utiliser que $\cos kx = \mathrm{Re}(e^{ikx}) = \mathrm{Re}((e^{ix})^k)$ puis $\sum_{k=1}^{n} q^k = q + q^2 + \cdots + q^n = q(1 + q + \cdots + q^{n-1})$.
Pour T_n, transformer S_n en utilisant la formule $\cos a \sin b = \dfrac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$

Indication pour l'exercice 1.2 : Pour la première équation utiliser que $x = \sin y \Leftrightarrow \arcsin x = y$ puis $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ (vérifier sous quelles hypothèses).
Pour la seconde équation, rechercher les valeurs autorisées (non interdites) puis passer au cos (en utilisant la formule cidessus).

Indication pour l'exercice 1.3 : Changement de variable $X = \dfrac{1 + ix}{1 - ix}$ et remarquer que $1 + X + X^2 + X^3$ est la somme des quatre premiers termes d'une suite géométrique, ce qui amène à une équation $X^4 = 1$ (sous quelques réserves) puis revoir les racines de l'unité.

Indication pour l'exercice 1.4 : Calculer soigneusement $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{2(1 + x^2)}$. En déduire l'expression de f sur les différents intervalles. Pour expliciter les constantes, passer à la limite (pour $\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$, factoriser par x^2 dans la racine et $\sqrt{x^2} = ...$)

Indication pour l'exercice 1.5 :

1. Pour la première assertion, justifier que $\overline{\beta^k} = \beta^{7-k}$ pour la seconde, utiliser la symétrie $\sin x = \sin(\pi - x)$ sur un angle pour justifier qu'un certain sinusbien choisi est plus grand qu'un autre.
2. β est une racine $7^{ième}$ de l'unité donc $\sum_{k=0}^{6} \beta^k = ...$ et utiliser que $\beta^k = \beta^k(\beta^7)^{-1} = \beta^{k-7}$ puis S et T sont racines d'un trinôme.

Indication pour l'exercice 1.6 : Les fonctions arccos et arcsin sont définies sur I donc $\dfrac{1 - x}{1 + x}$ et $\dfrac{2\sqrt{x}}{1 + x}$ doivent appartenir à cet intervalle I. Traduire ensuite ceci sous forme d'inégalités ($x \leqslant y \leqslant z \Leftrightarrow x \leqslant y$ et $y \leqslant z$).
Montrer ensuite que $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 1 \\ \dfrac{2}{(1+x)\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$ (utiliser au maximum les factorisations pour espérer s'en sortir)

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Lorsque $x = 0 \bmod 2\pi$ alors $S_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} 1 = n + \frac{1}{2}$ et

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(k + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2}[n+1] = \frac{(n+1)^2}{2}.$$

Lorsque $x \neq 0 \bmod 2\pi$, on utilise les formules d'Euler

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}(e^{ikx}) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)$$

Puisque $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ donc $e^{ix} \neq 1$, l'utilisation de la formule

$$e^a \pm e^b = \exp(\frac{a+b}{2})\left[\exp(\frac{a-b}{2}) \pm \exp(-\frac{a-b}{2})\right]$$

ainsi que la formule calculant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} &= e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{inx} = e^{ix}(1 + e^{ix} + \cdots + e^{i(n-1)x}) = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \exp(ix)\frac{\exp(\frac{inx}{2})}{\exp(\frac{ix}{2})}\frac{\exp(-\frac{inx}{2}) - \exp(\frac{inx}{2})}{\exp(-\frac{ix}{2}) - \exp(\frac{ix}{2})}\\ &= \exp(\frac{i(n+1)x}{2})\frac{-2i\sin(\frac{nx}{2})}{-2i\sin(\frac{x}{2})} = \exp(\frac{i(n+1)x}{2})\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(\frac{(n+1)x}{2})\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

Pour calculer T_n, on utilise la formule $\cos a \sin b = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$, ce qui permet d'écrire $S_n(x)$ sous la forme

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x) - \sin(\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}\mathrm{Im}(\exp((n+\frac{1}{2})x)$$

Le réel T_n s'écrit donc

$$\begin{aligned}T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} S_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin((k+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Im}(\exp(i(k+\frac{1}{2})x) = \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}\mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{n}\exp(i(k+\frac{1}{2})x\right].\\ &= \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}\mathrm{Im}\left[\exp(\frac{ix}{2})\sum_{k=0}^{n}\exp(ikx)\right] = \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}\mathrm{Im}\left[\exp(\frac{ix}{2})\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right]\\ &= \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}\mathrm{Im}\left[\exp(\frac{ix}{2})\exp(i\frac{nx}{2})\frac{\sin(n\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right] = \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})}.\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\mathrm{Im}\left[\exp(i(n+1)\frac{x}{2})\right]\\ &= \frac{\sin^2\left[(n+1)\frac{x}{2}\right]}{2\sin^2(\frac{x}{2})}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1.2 : Pour la première équation, il est indispensable d'exiger que $x \in [-1, 1]$ (domaine de définition du arcsin). Sous cette hypothèse, on a

$$(E) : \arcsin x = \arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} \Leftrightarrow x = \sin(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}) = \sin(\arcsin\frac{4}{5})\cos(\arcsin(\frac{5}{13})) + \cos(\arcsin(\frac{4}{5}))\sin(\arcsin(\frac{5}{13}))$$

En utilisant que $\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arcsin(x)) = x$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, on obtient

$$(E) \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} \times \sqrt{1-(\frac{5}{13})^2} + \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} \times \frac{5}{13} = \frac{4}{5} \times \sqrt{\frac{144}{13^2}} + \sqrt{\frac{9}{5^2}} \times \frac{5}{13} = \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{63}{65} \in [-1,1]$$

donc l'équation (E) admet une et une seule solution qui est $x = \dfrac{63}{65}$.

Pour la seconde équation, on doit exiger que x et $2x$ appartiennent à $[-1,1]$ (domaine de définition de arccos et arcsin), ce qui se traduit par $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ensuite, en utilisant que $\cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1-t^2}$ pour tout $t \in [-1,1]$, ce qui est le cas de x et $2x$, on a

$$(E') : \arccos x = \arcsin 2x \Leftrightarrow x = \cos(\arcsin 2x) \Leftrightarrow x = \sqrt{1-(2x)^2}$$

Cette dernière égalité impose que x est positif (une racine carrée est toujours positive) donc x doit appartenir à $[0, \frac{1}{2}]$. Puisque l'on dispose de l'équivalence $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ lorsque a et b sont positifs (ce qui est le cas avec $a = x$ et $b = \sqrt{1-(2x)^2}$), on en déduit que

$$(E') \Leftrightarrow x^2 = 1-(2x)^2 \Leftrightarrow 5x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Comme les solutions de (E') doivent appartenir à $[0, \frac{1}{2}]$, on peut affirmer que l'équation (E') admet une et une seule solution qui est $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Correction de l'exercice 1.3 : On pose $(E) : \left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^3 + \left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right)^2 + \left(\dfrac{1+ix}{1-ix}\right) + 1 = 0.$

On considère le changement de variable $X = \dfrac{1+ix}{1-ix}$, qui est licite car pour tout réel x, $1 - ix \neq 0$. Alors X vérifie l'équation

$$(E') : X^3 + X^2 + X + 1 = 0$$

et le membre de gauche de (E') s'écrit encore $\dfrac{1-X^4}{1-X}$ si $X \neq 1$ (somme de suite géométrique). On constate que $X = 1$ n'est pas solution de (E') donc on a l'équivalence

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad (E') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1-X^4}{1-X} = 0 \\ X \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1-X^4 = 0 \\ X \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} X^4 = 1 \\ X \neq 1 \end{array} \right. \underset{\text{racines quatrième de 1}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} X = \exp(\dfrac{2\pi i k}{4}), \quad k \in [\![0,3]\!] \\ X \neq 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad X = (\exp(\frac{\pi i}{2}))^k, \quad k \in [\![1,3]\!] \Leftrightarrow X = i^k, \quad k \in [\![1,3]\!]$$

Or $X = \dfrac{1+ix}{1-ix}$ donc on obtient

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1+ix}{1-ix} = i^k, \quad k \in \{1,2,3\} \Leftrightarrow 1 + ix = i^k(1-ix), \quad k \in \{1,2,3\} \Leftrightarrow ix(1+i^k) = i^k - 1, \quad k \in \{1,2,3\}.$$

Si $i^k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = 2$ alors l'équation précédente s'écrit $0 = -2$, ce qui est impossible donc nécessairement $k \in \{1,3\}$. On en déduit que

$$(E) \Leftrightarrow ix(1+i^k) = i^k - 1, \quad k \in \{1,3\} \Leftrightarrow x = \frac{i^k - 1}{i(1+i^k)}, \quad k \in \{1,3\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{i-1}{i(1+i)} = \dfrac{i-1}{i-1} = 1 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{i^3-1}{i(1+i^3)} = \dfrac{-i-1}{i+1} = -1 \end{array} \right.$$

Par conséquent, l'équation (E) admet deux solutions sur $\mathbb{R}$ qui sont 1 et -1.

Correction de l'exercice 1.4 : Domaine de définition : La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $1 + x^2$ étant positive sur $\mathbb{R}$, le réel $f(x)$ existe ssi $x \neq 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\times$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ (comme composée et quotients de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^\times$ dont le dénominateur ne s'annule pas) et l'on a pour tout réel x non nul

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)'}{1+\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)^2} = \left[\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\times x-\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{x^2}\right]\frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2}-1)^2+x^2} \\ &= \frac{x^2-\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2\sqrt{1+x^2}}.\frac{x^2}{1+x^2-2\sqrt{1+x^2}+1+x^2} \\ &= \frac{x^2-1-x^2+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}(1+x^2-\sqrt{1+x^2})} = \frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{2(1+x^2)(\sqrt{1+x^2}-1)} = \frac{1}{2(1+x^2)} \end{aligned}$$

On remarque que $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$ est la dérivée de $\dfrac{1}{2}\arctan x$. On en déduit qu'il existe deux constantes C_+ et C_- telles que

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2}\arctan x+C_- & \forall x<0 \\ f(x)=\dfrac{1}{2}\arctan x+C_+ & \forall x>0 \end{cases} \tag{1}$$

Remarque : deux fonctions admettant la même dérivée sur un <u>intervalle</u>*, sont égales à une constante additive près, par contre le théorème est faux sur un ensemble quelconque. Par exemple, la fonction* $h(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ -1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^\times$*, non constante et sa dérivée est nulle sur* $\mathbb{R}^\times$

Pour déterminer C_+ et C_-, de faire tendre x vers $\pm\infty$. Puisque l'on

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x} = \frac{|x|}{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x^2}\right),$$

on en déduit, en utilisant la définition de f, que :

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \begin{cases} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x>0 \\ -\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\tan 1=\dfrac{\pi}{4} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\tan(-1)=-\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

D'autre part, l'égalité (1) combiné au fait que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arctan x=\pm\dfrac{\pi}{2}$, on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\pi}{2}+C_+=\dfrac{\pi}{4}+C_+ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}.(-\dfrac{\pi}{2})+C_-=-\dfrac{\pi}{4}+C_- \end{cases}.$$

Par conséquent, on a nécessairement

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}+C_+=\dfrac{\pi}{4} \\ -\dfrac{\pi}{4}+C_-=-\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow C_+=C_-=0$$

donc $\forall x\in\mathbb{R}^\times, \quad f(x)=\dfrac{1}{2}\arctan x$.

Correction de l'exercice 1.5 : On remarque pour commencer que $\beta^7=1$ et que $\overline{\beta}=\beta^{-1}$

1. Puisque $\beta^7=1$, on a $\beta^{-k}=\beta^7\beta^{-k}=\beta^{7-k}$. On en déduit que

$$\overline{T}=\overline{\beta}^3+\overline{\beta}^5+\overline{\beta}^6=\beta^{-3}+\beta^{-5}+\beta^{-6}=\beta^{7-3}+\beta^{7-5}+\beta^{7-6}=\beta^4+\beta^2+\beta=S$$

   Ensuite, en utilisant que $\sin(\pi-x)=\sin x$, on a

$$\operatorname{Im} S=\sin(\frac{2\pi}{7})+\sin(\frac{4\pi}{7})+\sin(\frac{8\pi}{7})=\sin(\frac{2\pi}{7})+\sin(\frac{4\pi}{7})+\sin(\pi-\frac{8\pi}{7})=\sin(\frac{2\pi}{7})+\sin(\frac{4\pi}{7})-\sin(\frac{\pi}{7})$$

Puisque $0 \leqslant \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} \leqslant \frac{\pi}{2}$ et que la fonction sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que

$$\sin(\frac{\pi}{7}) < \sin(\frac{2\pi}{7}) \Rightarrow \sin(\frac{2\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7}) > 0.$$

Puisque $\frac{4\pi}{7} \in]0, \pi[$, on est assuré que $\sin \frac{4\pi}{7} > 0$ donc

$$\operatorname{Im} S = \underbrace{\sin(\frac{2\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7})}_{>0} + \underbrace{\sin(\frac{4\pi}{7})}_{>0} > 0$$

2. $S+T = \sum_{k=1}^{k} \beta^k = -1 + \sum_{k=0}^{6} \beta^k = -1$ car β est une racine $7^{ième}$ différente de 1. Ensuite, en utilisant que $\beta^k = \beta^k \underbrace{(\beta^{\overset{-1}{7}})}_{=1} = \beta^{k-7}$, on a

$$\begin{aligned} ST &= \left(\beta+\beta^2+\beta^4\right)\left(\beta^3+\beta^5+\beta^6\right) = \beta^4+\beta^5+\beta^6+3\beta^7+\beta^8+\beta^9+\beta^{10} = \beta^4+\beta^5+\beta^6+3+\beta+\beta^2+\beta^3 \\ &= 3+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5+\beta^6 = 3+S = 2 \end{aligned}$$

Les égalités $S+T=-1$ et $ST=2$ montre que S et T sont les solutions de l'équation

$$X^2 - (S+T)X + ST = 0 \Leftrightarrow X^2 + X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

Puisque $\operatorname{Im} S > 0$, on en déduit que $S = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $T = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ (T est le conjugué de S d'après 1)

Correction de l'exercice 1.6 : On pose $f(x) = \arccos \frac{1-x}{1+x} + \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. Les fonctions arccos et arcsin sont définies sur $[-1,1]$ donc pour que $f(x)$ existe il faut et il suffit que $\frac{1-x}{1+x}$ et $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ appartiennent à $[-1,1]$ et que x soit positif (pour que la racine carrée existe). Puisque $x \geqslant 0$, $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ est positif donc il suffit d'avoir $\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \leqslant 1$. Autrement dit $f(x)$ existe ssi

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \frac{1-x}{1+x} \geqslant -1 \\ \frac{1-x}{1+x} \leqslant 1 \\ \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \leqslant 1 \end{cases}$$

En multipliant les trois dernières inégalités par $1+x$, qui est positif car on exige $x \geqslant 0$), on obtient

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 1-x \geqslant -1-x \\ 1-x \leqslant 1+x \\ 2\sqrt{x} \leqslant 1+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 & \\ 1 \geqslant -1 & \text{toujours vrai} \\ 0 \leqslant 2x & \\ 0 \leqslant 1 - 2\sqrt{x} + x & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 & \\ 0 \leqslant (1-\sqrt{x})^2 & \text{toujours vrai} \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 0$$

d'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$.

Les fonctions arccos et arcsin étant continues sur $[-1,1]$, les fonctions $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ et $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ étant continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, les réels $\frac{1-x}{1+x}$ et $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ étant dans $[-1,1]$, on est assuré que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Les fonctions arccos et arcsin étant dérivables sur $[-1,1]$, les fonctions $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ et $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ étant continues sur $\mathbb{R}_+$ et les réels $\frac{1-x}{1+x}$ et $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ étant dans $]-1,1[$ ssi $x \in \mathbb{R}_+^{\times}$, on en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^{\times}$.

Sa dérivée est donnée par

$$
\begin{aligned}
\forall x &> 0,\\
f'(x) &= \left(\frac{1-x}{1+x}\right)'(\arccos)'\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)'(\arcsin)'\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)\\
&= \frac{-2}{(1+x)^2}\times\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}}+\frac{\frac{1+x}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}}{(1+x)^2}\times\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}}\\
&= \frac{1}{(1+x)^2}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}}\right]
\end{aligned}
$$

Puisque $(1+x)$ est positif si $x \geqslant 0$, on a $\sqrt{(1+x)^2}=1+x$, ce qui nous donne

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(1+x)^2}\left[\frac{2(1+x)}{\sqrt{(1+x)^2-(1-x)^2}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}}\times\frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2-(2\sqrt{x})^2}}\right]\\
&= \frac{1}{1+x}\left[\frac{2}{\sqrt{4x}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}\right]=\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\left[1+\frac{(1-x)}{\sqrt{(x-1)^2}}\right]
\end{aligned}
$$

On remarque que $x^2-2x+1=(x-1)^2$ et que $\sqrt{(x-1)^2}=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\geqslant 1\\ 1-x & \text{si } x\leqslant 1\end{cases}$, donc

$$
f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\left[1+\dfrac{1-x}{x-1}\right] & \text{si } x\geqslant 1\\ \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\left[1+\dfrac{1-x}{1-x}\right] & \text{si } 0<x\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}[1-1] & \text{si } x\geqslant 1\\ \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}[1+1] & \text{si } 0<x\leqslant 1\end{cases}=\begin{cases}0 & \text{si } x\geqslant 1\\ \dfrac{2}{(1+x)\sqrt{x}} & \text{si } 0<x\leqslant 1\end{cases}
$$

La fonction f étant continue sur $[0,1]$ et de dérivée strictement positive sur $]0,1]$, on peut affirmer qu'elle est strictement croissante sur $[0,1]$.
Sur l'intervalle $[1,+\infty[$, la fonction f est constante et cette constante est $f(1)=\arccos 0+\arcsin 1=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.