1 Exercices

Exercice 1.1 Soit (C) une conique de foyer O et de directrice associée D, Γ un cercle passant par O, coupant (C) en quatre points M_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ et D en deux points P_1 et P_2; montrer que

$$OM_1.OM_2.OM_3.OM_4 = OP_1^2 OP_2^2.$$

Exercice 1.2 Montrer que $\forall\ n \geqslant q, \quad \sum\limits_{k=q}^{n} C_k^q = C_{n+1}^{q+1}$. En déduire les sommes $\sum\limits_{k=1}^{n} k, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$

Exercice 1.3 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \quad \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Exercice 1.4 Nature des coniques :

$$(C_\lambda) : (1+\lambda)(x^2+y^2) + 2(1-\lambda)xy - y + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On distinguera les cas $\lambda = 0$, $\lambda < 0$, $0 < \lambda < 1$, $\lambda = 1$, $\lambda > 1$
Donner les centres et foyers de ces coniques

Exercice 1.5 On considère un réel $x \neq 1$ et une suite de réels $(s_k)_k$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x) \quad \text{avec} \quad s_0(x) = 1$$

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad s_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

Exercice 1.6 Si $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$, on note (D_t) la droite d'équation $x + ty - at^2 = 0$ dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormée $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, (D_t) est tangente à la parabole $(P) : y^2 = -4ax$ en un point M_t dont on donnera les coordonnées;
2. déterminer les normales à (P) passant par $S \begin{pmatrix} -5a \\ -2a \end{pmatrix}$ et préciser les intersections de ces normales avec (P).

Exercice 1.7 On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3} u_{n+1} + \frac{1}{3} u_n \quad \text{et} \quad v_{n+2} \leqslant \frac{1}{3} v_{n+1} + \frac{1}{3} v_n$$

On suppose que $v_0 \leqslant u_0$ et $v_1 \leqslant u_1$. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad v_n \leqslant u_n$

2 Indications

3 Corrections