1 Exercices

Exercice 1.1 On considère la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n+1}$ et $u_0 = 1$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad \dfrac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$
2. Justifier que $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{6}$.
3. On introduit la suite v définie par $\forall n \geqslant 0, \quad v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2} + \dfrac{1}{6}$ et $v_0 = 1$
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant v_n$.
   (b) Expliciter v_n en fonction de n et montrer que la suite u est convergente.

Exercice 1.2 Etudier la convergence de la suite u définie par $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ avec $u_0 = 0$ (on commencera par montrer que $u_n \in [0,2]$)

Exercice 1.3 Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, u_n existe et $u_n \geqslant 0$.
2. En déduire la monotonie de u et justifier la convergence de la suite u.

Exercice 1.4 Soit $a \in \mathbb{R}_+$, on considère la suite u définie par $\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!}$

On pose $v_k = \dfrac{a^k}{k!}$

1. Montrer qu'il existe un rang $N(a)$ tel que $\forall n \geqslant N(a), \quad v_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2} v_k$
2. Déterminer une majoration de v_k dépendant uniquement de k, pour $k \geqslant N(a)$.
3. Montrer que la suite u est majorée. En déduire que la suite u converge.
   Pour la petite histoire, on peut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^a$

Exercice 1.5 Montrer que la suite u définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a^k}{k}$ est convergente lorsque $a \in [0,1[$

Exercice 1.6 Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. On considère la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(a - u_n^2) \quad \text{et} \quad u_0 = 0$$

1. Démontrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \sqrt{a}$. En déduire que la suite u est convergente et expliciter sa limite.
2. On sait estimer la vitesse de convergence de la suite u.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad \sqrt{a} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a} - u_n)(2 - \sqrt{a} - u_n)$.
   En déduire que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \sqrt{a} - u_{n+1} \leqslant \left(1 - \dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)(\sqrt{a} - u_n)$
   puis que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \sqrt{a} - u_n \leqslant \sqrt{a}\left(1 - \dfrac{\sqrt{a}}{2}\right)^n$
   (b) Retrouver la réponse de la question 1.
   Comment peut-on calculer $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ avec 10^{-7} près ? Effectuer le calcul avec votre calculatrice.

2 Indications

3 Corrections