1 Exercices

Exercice 1.1 Montrer que les suites u et v définies par

$$\forall n \geqslant 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) \\ \dfrac{1}{v_{n+1}} & = & \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}) \end{cases}$$

sont adjacentes
Déterminer leur limite commune (on étudiera $u_n v_n$)

Exercice 1.2 On considère la suite S définie par $\forall n \geqslant 0, \quad S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, \quad \dfrac{|x|^n}{n!} \leqslant (\dfrac{1}{2})^{n-N} \dfrac{|x|^N}{N!}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^n}{n!}$
2. On suppose $x \leqslant 0$.
   (a) Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, le signe de la fonction $x \mapsto e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ sur $\mathbb{R}_-$ est celui de $(-1)^{n+1}$
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite (S_n) converge vers e^x.
3. On suppose $x > 0$.
   (a) Montrer que la suite S est majorée.
   (b) Montrer que la suite S converge

Exercice 1.3 On introduit les trois suites suivantes :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{n}}, \quad S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right) - (n + \frac{1}{2}) \ln n + n, \quad T_n = S_n - \frac{1}{12n}$$

On admet (provisoirement) que les fonctions f et g définies par

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = 1 - (x + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{x}) \quad \text{et} \quad g(x) = f(x) - \frac{1}{12}(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x})$$

sont respectivement négative et positive sur $[1, +\infty[$ ($f \leqslant 0$ et $g \geqslant 0$)

1. Montrer que les deux suites S et T sont adjacentes.
2. En déduire que la suite u converge vers un réel strictement positif.
3. Montrer que les fonctions f et g sont bien positives sur $[1, +\infty[$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : On commence par justifier par récurrence l'existence des suites u et v (des divisions sont présentes) en montrer que $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
Montrer qu'elles sont bien adjacentes, on constate que la monotonie de u et de v résulte du signe de $v_n - u_n$. Pour cela, on exprime $u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction de u_n et v_n (on verra une identité remarquable apparaitre).
Il reste à montrer que $u_n - v_n \to 0$: pour cela, l'expression de $u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction de u_n et v_n montre que $u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n - v_n)$ puis par récurrence $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(u_1 - v_1)$ (l'égalité n'est possible que si $n \geqslant 1$) et on applique le théorème d'encadrement (dit aussi des gendarmes)
Pour la limite, la suite $u_n v_n$ est constante donc sa limite est la constante, or $u_n \to l$ et $v_n \to l$ donc .... et comme $u_n > 0$, on a $l \geqslant 0$

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Si $x = 0$, c'est évident, sinon $x \neq 0$ et l'on écrit $\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{1} \times \frac{|x|}{2} \times \cdots \times \frac{|x|^k}{k} \times \cdots \times \frac{|x|^n}{n}$. On constate que le facteur général $\frac{|x|}{k}$ est moindre que $\frac{1}{2}$ ssi
$$\frac{|x|}{k} \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \geqslant 2\,|x| \Leftrightarrow k \geqslant 2E(|x|) + 1 = N$$
et en conclure en distinguant les facteurs plus grand que $\frac{1}{2}$ et ceux inférieurs à $\frac{1}{2}$.
Pour la limite, N est fixé, $n \to +\infty$, on applique le théorème d'encadrement (dit aussi des gendarmes)

2. (a) Pour la montonie, cela résulte du calcul de la différence de deux termes consécutifs (par exemple, $S_{2n+2} - S_{2n}$) en factorisant au mieux la différence ($(n+2)! = ... \times n!$) et pour le fait que la différence $S_{2n+1} - S_{2n}$ tend vers 0, cela découle de la question précédente.
   (b) Pour l'hérédité, on utilise simplement que $\frac{d}{dx}(e^x - (\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}) = e^x - (\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!})$ car
   $$\frac{d}{dx}(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}) = \frac{d}{dx}(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx}(\frac{x^k}{k!}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$
   donc on a le signe de la dérivée de $e^x - (\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!})$ en fonction du signe de $e^x - (\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!})$, ce qui fournit le sens de variation de $e^x - (\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!})$ (on distinguera les cas pairs des cas impairs), on calcule la valeur de cette fonction en $x = 0$ et on conclut.
   (c) La question a) montre que S_{2n} et S_{2n+1} converge vers la même limite L donc la suite S_n converge vers L (cf. le cours sur les suites extraites). Pour finir, utiliser la question b) pour encadrer e^x par S_{2n} et S_{2n+1} et passer à la limite

3. (a) Utiliser la question 1 pour casser la somme en deux sommes, la première étant indépendante de n (donc c'est une constante, qui dépend néanmoins de x mais celui-ci est fixé) et la deuxième somme est majorée par $C \times (\frac{1}{2})^n$ (cela résulte du calcul de
   $$q^t + q^{t+1} + \cdots + q^n = q^t(1 + q + \cdots + q^{n-t}) = ???? \leqslant q^t \times \frac{1}{1-q}$$
   lorsque $q \in [0, 1[$)
   (b) Théorème sur les suites monotones.

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Vérifier que $S_{n+1} - S_n = f(n)$ et $T_{n+1} - T_n = g(n)$
2. Vérifier que $\ln u_n = S_n$
3. Calculer f' et f'', en déduire le signe de f'' donc la monotonie de f', évaluer $f'(1)$ et en déduire le signe de f' puis donner le sens de variation de f et évaluer $f(1)$.
Idem avec g.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)