1 Exercices

Exercice 1.1 Soit x un réel positif
Montrer que la suite u définie par $u_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ est croissante et déterminer sa limite.

Exercice 1.2 Soit $\alpha = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\mathbb{Z}[\alpha] = \{n + m\alpha, \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $\mathbb{Q}[\alpha] = \{a + b\alpha, \quad (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$

1. Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un corps et que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un anneau.
2. Montrer que $N : a + b\alpha \mapsto a^2 + ab + b^2$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{Q}[\alpha]\backslash\{0\}, \times)$ dans $\mathbb{Q}$ et que $N(\mathbb{Z}[\alpha]) \subset \mathbb{Z}$.
3. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\alpha]$

Exercice 1.3 L'ensemble $\mathcal{A} = \{\frac{n}{2^k}, \quad (n,k) \in \mathbb{Z}^2\}$ est-il un anneau (pour l'addition et la multiplication des réels). Est-ce un corps ?

Exercice 1.4 On considère la suite u définie par $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n^2 - u_n + 3$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$

1. Déterminer la monotonie de la suite u et justifier que $u_1 \in \mathbb{R}_+$.
2. On suppose $u_1 \in [0,3]$. Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad u_n \in [0,3]$. Conclusion
3. On suppose $u_1 > 3$.
   Montrer que la suite u tend vers $+\infty$ et qu'il existe un rang N tel que $\forall n \geqslant N, \quad u_n > 6$.
4. Recherche de l'ordre de grandeur de u_n lorsque $u_0 > 3$ pour n très grand.
   On considère la suite v définie par : $\forall n \geqslant N, \quad v_n = u_n - 3$.
   (a) Donner la relation de récurrence satisfaite par v.
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant N, \quad 2\ln v_n - \ln 3 \leqslant \ln v_{n+1}$ puis donner un minorant de $\ln v_n$.
   La suite u converge-t-elle vers $+\infty$ plus rapidement qu'une suite n^α ? q^n ? $n!$? n^n ?
   (c) Montrer que la suite $(\frac{\ln v_n}{2^n})$ est bornée puis déterminer sa monotonie.
   (d) En déduire que la suite $(\frac{\ln v_n}{2^n})$ converge vers une constante $C > 0$.

Exercice 1.5

1. On considère la suite u définie par $\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{2}u_n}$ avec $u_1 = 1$
   (a) Montrer que la suite u est positive et déterminer son unique limite éventuelle α.
   (b) Montrer que $\forall \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   (c) Déterminer la monotonie de la suite u et conclure.
2. Soit la suite w définie par $\forall n \geqslant 1, \quad w_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{n}}}$
   (a) Montrer que : $\forall n \geqslant 1, \quad (w_{n+1})^2 \leqslant 1 + \sqrt{2}w_n$.
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad w_n \leqslant u_n$
   (c) La suite w est-elle convergente ?

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Pour la monotonie, étudier les variations de la fonction $t \mapsto (1+\frac{x}{t})^t = \exp(t\ln(1+\frac{x}{t}))$ lorsque $t \geqslant 1$ (il sufft d'étudier le signe de la dérivée seconde de $t \mapsto t\ln(1+\frac{x}{t})$ puis les variations et le signe de la dérivée puis les variations de la fonction et préciser sa limite en $+\infty$)
Pour la limite, passer au logarithme et utiliser l'équivalent de $\ln(1+x)$ lorsque x tend vers 0

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Utiliser la caractérisation des sous-corps et des sous-anneaux (par exemple, (développer $(a+b\alpha)(a'+b'\alpha)$et exprimer α^2 en fonction de α et 1 pour justifier que $(a+b\alpha)(a'+b'\alpha) \in \mathbb{Q}[\alpha]$)
2. Remarquer que $N(a+b\alpha) = (a+b\alpha)(a+b\overline{\alpha})$ pour vérifier qu'il s'agit d'un morphisme.
3. Si $u = a+b\alpha$ est inversible alors il existe v tel que $uv = 1$ donc $N(u)N(v) = 1$, ce qui implique que $N(u)$ est inversible dans $\mathbb{Z}$ donc $N(u) =$??? Ensuite, utiliser que $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ pour obtenir une majoration de a^2+b^2 puis obtenir les valeurs possibles de a et b. Tester alors les diverses possibilités pour u.

Indication pour l'exercice 1.3 : Utiliser la caractérisation des sous-anneaux.
Pour le corps, que dire de l'inverse de 3 ?

Indication pour l'exercice 1.4 :

1. $u_{n+1} - u_n$ s'écrit en fonction en u_n à l'aide d'un tribône dont on déterminera le signe.
   u_1 s'exprime comme un trinôme en u_0 dont on déterminera le signe.
2. On procède par récurrence et deux méthodes sont possibles pour l'hérédité :
   Vérifier que $[0,3]$ est un intervalle stable par $x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - x + 3$
   Etudier le signe de $u_{n+1} - 3$ en l'exprimant en fonction de u_n et en factorisant l'expression considérée.
   Pour la conclusion, revoir les théorèmes de convergence monotone
3. Procéder par l'absurde en supposant que la suite u est bornée. Dans ce cas, justifier la convergence et expliciter sa limite. Aboutir à une contradiction.
   Pour le second point, il s'agit uniquement de la définition de la divergence vers $+\infty$
4. (a) v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis de u_n puis de v_n
   (b) Passer au logarithme dans la relation de v, factoriser par le terme tendant le plus vite vers $+\infty$ et utiliser les règles de calcul sur le logarithme
   Pour le minorant, considérer la suite $(w_n)_{n\geqslant N}$ définie par $w_N = v_N$ et $\forall n \geqslant N$, $w_{n+1} = 2w_n - \ln 3$. Démontrer par récurrence que $\forall n \geqslant N$, $w_n \leqslant \ln v_n$. Expliciter alors w_n en fonction de n et N (il s'agit d'une suite arithmético-géométrique).
   Pour la question suivante, utiliser le théorème d'encadrement et pour la vitesse de convergence, étudier la limite des quotients respectifs du e^{w_n} par les différentes suites.
   (c) Vérifier que $\left|\frac{\ln v_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln v_n}{2^n}\right| \leqslant \frac{C}{2^n}$ pour une constante C convenable. En déduire une majoration de $\left|\frac{\ln v_n}{2^n} - \frac{\ln v_N}{2^N}\right|$ de la forme $\frac{C}{2^N}$.
   Pour la monotonie, donner l'équivalent de $\frac{\ln v_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\ln v_n}{2^n}$ puis en déduire son signe lorsque n est suffisamment grand.
   (d) RAS (le signe de C ne peut être négatif sinon $\ln v_n$ sera bornée, ce qui contredit le fait que $u_n \to +\infty$)

Indication pour l'exercice 1.5 :

1. (a) RAS
   (b) Par récurrence, en remarquant que $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}\alpha}$ (α est solution de l'équation $x = \sqrt{1+\sqrt{2}x}$
   (c) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ en utilisant que $\sqrt{a} - b = \frac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}$ (la célébrissime quantité conjuguée)
2. (a) Considérer $(w_{n+1})^2 = 1 + \sqrt{2a}$ et vérifier que $a^2 \leqslant w_n$
   (b) Procéder par récurrence.
   (c) Justifier que $w_n \leqslant w_{n+1}$ (voir sur $n = 1,2,3$ pour se convaincre et trouver le bon argument)

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.4 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.5 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)