1 Exercices

Exercice 1.1 Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on considère la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = x + x^2 + ... + x^n$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0, 1]$, que l'on notera u_n.
2. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.
3. Déterminer la limite L de la suite $(u_n)_n$ (on écrira f_n sous une autre forme)
4. Donner un équivalent de $u_n - L$

Exercice 1.2 Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
2. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.
3. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_n$ et expliciter sa limite L.

Exercice 1.3 On note (E_n) l'équation $(E_n) : \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = n$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une unique solution, notée x_n, sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
2. Quelle est la monotonie de la suite $(x_n)_n$?
3. La suite $(x_n)_n$ est-elle convergente ? Quelle est sa limite ?
4. Donner un équivalent de x_n.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Appliquer le théorème de bijection à f_n sur $[0,1]$
2. Comparer $f_{n+1}(u_{n+1})$ (facile) et $f_{n+1}(u_n)$ (on explicitera $f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et de x). En déduire la comparaison entre u_{n+1} et u_n.
3. Ecrire explicitement que $f_n(u_n)=0$. Remarquer alors qu'il s'agit d'une somme de suite géométrique et on remercie notre cher Karl Friedriech Gauss (il l'a retrouver à 10 ans !, à quand la MathAcademy :=)) Justifier que $(u_n)^n \to 0$ (on montrera que $u_n \leqslant \frac{3}{4}$ lorsque n est assez grand) et en déduire la limite.
4. Utiliser l'égalité $f_n(u_n)$ réécrite selon la question précédente.

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Théorème de bijection
2. Comparer $f_{n+1}(u_n)$ (simplifier $f_{n+1}(x)-f_n(x)$) et $f_{n+1}(u_{n+1})$.
3. Expliciter $f_n(u_n)=0$, justifier que $u_n \leqslant \frac{2}{3}$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)^n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Theorème de bijection.
2. Comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$, où $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, en déduire la comparaison entre x_n et x_{n+1}
3. Supposer que la suite est bornée, en déduire la convergence et passer à la limite dans la relation satisfaite par x_n.
4. Utiliser la relation satisfaite par x_n et factoriser au dénominateur le dominant, simplifier, vous aurez une souris toute chaude, pardon, l'équivalent de x_n :=)

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)