1 Exercices

Exercice 1.1 Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant tel que $P(n)$ soit un nombre premier pour tout entier n.
(Pensez à une formule de Taylor associée à $P(n+a)$ pour un a convenable)

Exercice 1.2 Pour tout entier n, on pose $L_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$

1. Justifier, sans effectuer de calculs, L_1 et L_2 admettent respectivement une et deux racines dans $]-1,1[$.
2. Calculer $((x^2-1)^n)^{(k)}_{|x=\pm 1}$ pour $k \in \{0,..,n-1\}$
3. Montrer que L_n possède n zéros distincts appartenant à $]-1,1[$.

Exercice 1.3 Soit f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$, $a_1 < .. < a_n$ des points de $[a,b]$.
Le polynôme interpolateur P de f en les (a_i) est défini par

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k) \prod_{j \neq k} \frac{x-a_j}{a_k-a_j}$$

On souhaite montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-a_1)..(x-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

1. Montrer le résultat lorsque $n = 1$ (on pensera que x est une constante !)
2. Montrer le résultat lorsqu $n = 2$.(on pensera que x est une constante !)
3. Démontrer le résultat dans le cas général (on pensera que x est une constante !)

Exercice 1.4 Soit f une fonction C^1 et bornée sur $\mathbb{R}$. On suppose que f' possède une limite finie en $+\infty$.
Que peut-on dire de cette limite ?

Exercice 1.5 Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{xe^x}{e^x-1}$

1. se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
2. et, qu'ainsi prolongée, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant tel que $P(n)$ soit un nombre premier pour tout entier n.
(Pensez à une formule de Taylor associée à $P(n+a)$ pour un a convenable)

Indication pour l'exercice 1.2 : Pour tout entier n, on pose $L_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$

1. Justifier, sans effectuer de calculs, L_1 et L_2 admettent respectivement une et deux racines dans $]-1,1[$.
2. Calculer $((x^2-1)^n)^{(k)}_{|x=\pm 1}$ pour $k \in \{0,..,n-1\}$
3. Montrer que L_n possède n zéros distincts appartenant à $]-1,1[$.

Indication pour l'exercice 1.3 :
Soit f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$, $a_1 < .. < a_n$ des points de $[a,b]$.
Le polynôme interpolateur P de f en les (a_i) est défini par

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k) \prod_{j \neq k} \frac{x-a_j}{a_k-a_j}$$

On souhaite montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-a_1)..(x-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

1. Montrer le résultat lorsque $n = 1$ (on pensera que x est une constante !)
2. Montrer le résultat lorsqu $n = 2$.(on pensera que x est une constante !)
3. Démontrer le résultat dans le cas général (on pensera que x est une constante !)

Indication pour l'exercice 1.4 : Soit f une fonction C^1 et bornée sur $\mathbb{R}$. On suppose que f' possède une limite finie en $+\infty$.
Que peut-on dire de cette limite ?

Indication pour l'exercice 1.5 : Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$

1. se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
2. et, qu'ainsi prolongée, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant tel que $P(n)$ soit un nombre premier pour tout entier n.
(Pensez à une formule de Taylor associée à $P(n+a)$ pour un a convenable)

Correction de l'exercice 1.2 : Pour tout entier n, on pose $L_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$

1. Justifier, sans effectuer de calculs, L_1 et L_2 admettent respectivement une et deux racines dans $]-1,1[$.
2. Calculer $((x^2-1)^n)^{(k)}_{|x=\pm 1}$ pour $k \in \{0,..,n-1\}$
3. Montrer que L_n possède n zéros distincts appartenant à $]-1,1[$.

Correction de l'exercice 1.3 :
Soit f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$, $a_1 < .. < a_n$ des points de $[a,b]$.
Le polynôme interpolateur P de f en les (a_i) est défini par

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k) \prod_{j\neq k} \frac{x-a_j}{a_k-a_j}$$

On souhaite montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{(x-a_1)..(x-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

1. Montrer le résultat lorsque $n = 1$ (on pensera que x est une constante !)
2. Montrer le résultat lorsqu $n = 2$.(on pensera que x est une constante !)
3. Démontrer le résultat dans le cas général (on pensera que x est une constante !)

Correction de l'exercice 1.4 : Soit f une fonction C^1 et bornée sur $\mathbb{R}$. On suppose que f' possède une limite finie en $+\infty$.
Que peut-on dire de cette limite ?

Correction de l'exercice 1.5 : Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$

1. se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$
2. et, qu'ainsi prolongée, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter