1 Exercices

Exercice 1.1

1. Justifier que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x + y - 2z = t$ et $t - x + y = 0\}$ est un espace vectoriel
2. Expliciter une famille génératrice.
3. On note $G_1 = \text{Vect}((0, 1, 1, 0), (-1, 4, 0, 1))$ et $G_2 = \text{Vect}((0, -1, 1, 0), (-1, 4, 0, 1))$
   Est-ce que $F \oplus G_1 = \mathbb{R}^4$? $F \oplus G_2 = \mathbb{R}^4$?

Exercice 1.2 On considère les polynômes $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ si $k \geqslant 1$ et $\binom{x}{0} = 1$
Montrer que $\text{Vect}(\binom{x}{k}, \quad k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}[X]$

Exercice 1.3 On considère l'ensemble E_n des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b P(t)dt = \frac{1}{6}\left[P(a) + P(b) + 4P(\frac{a+b}{2})\right]$$

1. Justifier que E_n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une famille génératrice de E_3 puis de E_4.
3. Déterminer une famille génératrice de E_n

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Justifier que $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x+y-2z = t$ et $t-x+y = 0\}$ est un espace vectoriel
2. Expliciter une famille génératrice.
3. On note $G_1 = \mathrm{Vect}((0,1,1,0),(-1,4,0,1))$ et $G_2 = \mathrm{Vect}((0,-1,1,0),(-1,4,0,1))$
   Est-ce que $F \oplus G_1 = \mathbb{R}^4$? $F \oplus G_2 = \mathbb{R}^4$?

Indication pour l'exercice 1.2 : On considère les polynômes $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ si $k \geqslant 1$ et $\binom{x}{0} = 1$
Montrer que $\mathrm{Vect}(\binom{x}{k},\quad k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}[X]$

Indication pour l'exercice 1.3 : On considère l'ensemble E_n des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b P(t)dt = \frac{1}{6}\left[P(a)+P(b)+4P(\frac{a+b}{2})\right]$$

1. Justifier que E_n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une famille génératrice de E_3 puis de E_4.
3. Déterminer une famille génératrice de E_n

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. Justifier que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x + y - 2z = t$ et $t - x + y = 0\}$ est un espace vectoriel
2. Expliciter une famille génératrice.
3. On note $G_1 = \mathrm{Vect}((0, 1, 1, 0), (-1, 4, 0, 1))$ et $G_2 = \mathrm{Vect}((0, -1, 1, 0), (-1, 4, 0, 1))$
   Est-ce que $F \oplus G_1 = \mathbb{R}^4$? $F \oplus G_2 = \mathbb{R}^4$?

Correction de l'exercice 1.2 : On considère les polynômes $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ si $k \geqslant 1$ et $\binom{x}{0} = 1$
Montrer que $\mathrm{Vect}(\binom{x}{k}, \quad k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}[X]$

Correction de l'exercice 1.3 : On considère l'ensemble E_n des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b P(t)dt = \frac{1}{6}\left[P(a) + P(b) + 4P(\frac{a+b}{2})\right]$$

1. Justifier que E_n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une famille génératrice de E_3 puis de E_4.
3. Déterminer une famille génératrice de E_n