1 Exercices

Exercice 1.1 Soient $a_1 < ... < a_n$ des nombres réels.

1. Montrer que la famille $(x \mapsto x^{a_i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$
2. Montrer que la famille $(x \to e^{a_i x}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. Montrer que la famille $(x \mapsto |x - a_i|\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Exercice 1.2 On considère l'équation différentielle

$$(S) : x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions C^∞ sur $]0,+\infty[$ est un espace vectoriel.

   On note E cet espace vectoriel et on considère l'endomorphisme de $C^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ défini par $\phi(y) = [x \mapsto xy'(x)]$
2. On admet que $\phi^3 + 2\phi^2 - \phi - 2\,\mathrm{Id} = 0$ sur E.
   Montrer que $E = \ker(f - 2\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}) \oplus \ker(f - \mathrm{Id})$
3. En déduire que E est de dimension finie et donner sa dimension.
4. Démontrer que $\phi^3 + 2\phi^2 - \phi - 2\,\mathrm{Id} = 0$ sur E

Exercice 1.3 On considère les polynômes $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ si $k \geqslant 1$ et $\binom{x}{0} = 1$

1. Montrer que la famille $\left\{\binom{x}{k}, \quad k \in [\![0,n]\!]\right\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Est-une base de $\mathbb{R}_n[X]$?
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, déterminer les réels $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ tels que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \binom{x}{k}$.
4. On suppose que $P(0), .., P(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Soient $a_1 < ... < a_n$ des nombres réels.

1. Montrer que la famille $(x \mapsto x^{a_i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$
2. Montrer que la famille $(x \to e^{a_i x}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. Montrer que la famille $(x \mapsto |x - a_i|\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Indication pour l'exercice 1.2 : On considère l'équation différentielle

$$(S) : x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions C^∞ sur $]0,+\infty[$ est un espace vectoriel.

   On note E cet espace vectoriel et on considère l'endomorphisme de $C^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ défini par $\phi(y) = [x \mapsto xy'(x)]$
2. On admet que $\phi^3 + 2\phi^2 - \phi - 2\,\mathrm{Id} = 0$ sur E.
   Montrer que $E = \ker(f - 2\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}) \oplus \ker(f - \mathrm{Id})$
3. En déduire que E est de dimension finie et donner sa dimension.
4. Démontrer que $\phi^3 + 2\phi^2 - \phi - 2\,\mathrm{Id} = 0$ sur E

Indication pour l'exercice 1.3 : On considère les polynômes $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ si $k \geqslant 1$ et $\binom{x}{0} = 1$

1. Montrer que la famille $\left\{\binom{x}{k}, \quad k \in [\![0,n]\!]\right\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Est-une base de $\mathbb{R}_n[X]$?
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, déterminer les réels $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{x}{k}$.
4. On suppose que $P(0), .., P(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Soient $a_1 < ... < a_n$ des nombres réels.

1. Montrer que la famille $(x \mapsto x^{a_i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(]0,+\infty[,\mathbb{R})$
2. Montrer que la famille $(x \to e^{a_i x}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. Montrer que la famille $(x \mapsto |x - a_i|\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Correction de l'exercice 1.2 : On considère l'équation différentielle

$$(S) : x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$$

1. Montrer que l'ensemble des solutions C^∞ sur $]0,+\infty[$ est un espace vectoriel.

   On note E cet espace vectoriel et on considère l'endomorphisme de $C^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ défini par $\phi(y) = [x \mapsto xy'(x)]$
2. On admet que $\phi^3 + 2\phi^2 - \phi - 2\,\mathrm{Id} = 0$ sur E.
   Montrer que $E = \ker(f - 2\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}) \oplus \ker(f - \mathrm{Id})$
3. En déduire que E est de dimension finie et donner sa dimension.
4. Démontrer que $\phi^3 + 2\phi^2 - \phi - 2\,\mathrm{Id} = 0$ sur E

Correction de l'exercice 1.3 : On considère les polynômes $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ si $k \geqslant 1$ et $\binom{x}{0} = 1$

1. Montrer que la famille $\left\{\binom{x}{k}, \quad k \in [\![0,n]\!]\right\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Est-une base de $\mathbb{R}_n[X]$?
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, déterminer les réels $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ tels que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \binom{x}{k}$.
4. On suppose que $P(0),..,P(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.