1 Exercices

Exercice 1.1 Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in GL(E)$. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E$

Exercice 1.2 $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & XP' - \lambda P \end{array}$

1. Montrer que $\varphi_\lambda \in \mathcal{L}(E)$
2. Déterminer une CNS sur λ pour que $\varphi_\lambda \in GL(\mathcal{L}(E))$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in GL(E)$.
Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E$

Indication pour l'exercice 1.2 : $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & XP' - \lambda P \end{array}$

1. Montrer que $\varphi_\lambda \in \mathcal{L}(E)$
2. Déterminer une CNS sur λ pour que $\varphi_\lambda \in GL(\mathcal{L}(E))$

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in GL(E)$.
Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E$

Correction de l'exercice 1.2 : $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi_\lambda : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & XP' - \lambda P \end{array}$

1. Montrer que $\varphi_\lambda \in \mathcal{L}(E)$
2. Déterminer une CNS sur λ pour que $\varphi_\lambda \in GL(\mathcal{L}(E))$