1 Exercices

Exercice 1.1 $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Soit $F : P \mapsto (P(-1), P'(-1), P(1), P'(1))$. Montrer que F est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^4$.
2. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$; déterminer $P_i = F^{-1}(e_i)$.
Que peut-on dire de la famille $(P_i)_{0 \leq i \leq 3}$
3. Pour P dans E , on pose $g(P) = \int_{-1}^1 tP(t)dt$. Montrer qu'il existe a_1, a_2, a_3, a_4 uniques tels que, pour tout P dans E ,

$$g(P) = a_1P(1) + a_2P(-1) + a_3P'(1) + a_4P'(-1).$$

Exercice 1.2 Soit $(P_n)_n$ une suite de polynomes telle que

$$\forall n \geq 2, \quad P_n(X) = 2XP_{n-1}(X) - P_{n-2}(X) \text{ avec } P_0(X) = 1 \text{ et } P_1(X) = 1 - 2X$$

1. Déterminer pour tout entier naturel n le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.
2. Déterminer les racines de P_n . En déduire une écriture de P_n .
3. Déterminer directement une expression de P_n en fonction de n .

Exercice 1.3 1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(X) = \sum_{k=0}^n (\Delta^n P)(0) \binom{x}{k}$, où

- $\Delta : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$
- $\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} & \text{si } k \geq 1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$

2. En déduire la base duale de $\left\{ \binom{x}{k}, \quad k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}$.
3. Déterminer l'image de l'application linéaire Δ .

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Soit $F : P \mapsto (P(-1), P'(-1), P(1), P'(1))$. Montrer que F est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^4$.
2. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$; déterminer $P_i = F^{-1}(e_i)$.
Que peut-on dire de la famille $(P_i)_{0 \leq i \leq 3}$?
3. Pour P dans E , on pose $g(P) = \int_{-1}^1 tP(t)dt$. Montrer qu'il existe a_1, a_2, a_3, a_4 uniques tels que, pour tout P dans E ,

$$g(P) = a_1P(1) + a_2P(-1) + a_3P'(1) + a_4P'(-1).$$

Indication pour l'exercice 1.2 : Soit $(P_n)_n$ une suite de polynomes telle que

$$\forall n \geq 2, \quad P_n(X) = 2XP_{n-1}(X) - P_{n-2}(X) \text{ avec } P_0(X) = 1 \text{ et } P_1(X) = 1 - 2X$$

1. Déterminer pour tout entier naturel n le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.
2. Déterminer les racines de P_n . En déduire une écriture de P_n .
3. Déterminer directement une expression de P_n en fonction de n .

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(X) = \sum_{k=0}^n (\Delta^k P)(0) \binom{x}{k}$, où

- $\Delta : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$
- $\binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} & \text{si } k \geq 1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$

2. En déduire la base duale de $\left\{ \binom{x}{k}, k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}$.
3. Déterminer l'image de l'application linéaire Δ .

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Soit $F : P \mapsto (P(-1), P'(-1), P(1), P'(1))$. Montrer que F est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^4$.
2. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$; déterminer $P_i = F^{-1}(e_i)$.
Que peut-on dire de la famille $(P_i)_{0 \leq i \leq 3}$
3. Pour P dans E , on pose $g(P) = \int_{-1}^1 tP(t)dt$. Montrer qu'il existe a_1, a_2, a_3, a_4 uniques tels que, pour tout P dans E ,

$$g(P) = a_1P(1) + a_2P(-1) + a_3P'(1) + a_4P'(-1).$$

Correction de l'exercice 1.2 : Soit $(P_n)_n$ une suite de polynomes telle que

$$\forall n \geq 2, \quad P_n(X) = 2XP_{n-1}(X) - P_{n-2}(X) \text{ avec } P_0(X) = 1 \text{ et } P_1(X) = 1 - 2X$$

1. Déterminer pour tout entier naturel n le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.
2. Déterminer les racines de P_n . En déduire une écriture de P_n .
3. Déterminer directement une expression de P_n en fonction de n .

Correction de l'exercice 1.3 :

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(X) = \sum_{k=0}^n (\Delta^n P)(0) \binom{x}{k}$, où

$$\begin{aligned} &\bullet \Delta : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) - P(X) \\ &\bullet \binom{x}{k} = \begin{cases} \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} & \text{si } k \geq 1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. En déduire la base duale de $\left\{ \binom{x}{k}, \quad k \in \llbracket 0, n \rrbracket \right\}$.
3. Déterminer l'image de l'application linéaire Δ .