1 Exercices

Exercice 1.1 Module et argument de $\dfrac{1+xe^{i\theta}}{1+xe^{-i\theta}}$ avec $x \in]-1,1[$

Exercice 1.2 Etudier la fonction $x \mapsto \arctan \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

Exercice 1.3 Soit $\alpha = \exp(\dfrac{2i\pi}{5})$. Déterminer la partie imaginaire de $(\alpha+1)^n$

Exercice 1.4 Résoudre l'équation $\arcsin x = \arcsin \dfrac{4}{5} + \arcsin \dfrac{5}{13}$ puis l'équation $\arccos x = \arcsin 2x$

Exercice 1.5 On note $\beta = \exp(\dfrac{2i\pi}{7})$, $S = \beta + \beta^2 + \beta^4$ et $T = \beta^3 + \beta^5 + \beta^6$.

1. Justifier que S et T sont conjugués puis montrer que $\operatorname{Im} S > 0$.
2. Calculer $S+T$ et ST. En déduire les valeurs de S et T.

Exercice 1.6 Etudier la fonction $x \mapsto \arccos \dfrac{1-x}{1+x} + \arcsin \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \cdots$ et $\arg \frac{z}{z'} = \cdots$ Ensuite, utiliser que si $z = a + ib$ et $z = \rho e^{i\theta}$ alors $\tan\theta = \frac{b}{a}$ (faire un dessin pour s'en convaincre). On obtient ainsi l'angle polaire de z à π près. Ensuite se rappeler dans quel intervalle se localise $\arctan x$, pour x un réel quelconque puis faire un dessin pour localiser θ et enfin obtenir la valeur précise de θ.

Indication pour l'exercice 1.2 : Calculer soigneusement $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$. En déduire l'expression de f sur les différents intervalles. Pour expliciter les constantes, passer à la limite (pour $\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, factoriser par x^2 dans la racine et $\sqrt{x^2} = ...$)

Indication pour l'exercice 1.3 : Déterminer la forme polaire (trigonométrique) de $\alpha + 1$ en utilsant que $e^a + e^b = e^{(a+b)/2}[...]$ puis celle de $(\alpha+1)^n$

Indication pour l'exercice 1.4 : Pour la première équation utiliser que $x = \sin y \Leftrightarrow \arcsin x = y$ puis $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ (vérifier sous quelles hypothèses).
Pour la seconde équation, rechercher les valeurs autorisées (non interdites) puis passer au cos (en utilisant la formule ci-dessus).

Indication pour l'exercice 1.5 :

1. Pour la première assertion, justifier que $\overline{\beta^k} = \beta^{7-k}$ pour la seconde, utiliser la symétrie $\sin x = \sin(\pi - x)$ sur un angle pour justifier qu'un certain sinusbien choisi est plus grand qu'un autre.

2. β est une racine $7^{i\grave{e}me}$ de l'unité donc $\sum_{k=0}^{6} \beta^k = ...$ et utiliser que $\beta^k = \beta^k(\beta^7)^{-1} = \beta^{k-7}$ puis S et T sont racines d'un trinôme.

Indication pour l'exercice 1.6 : Les fonctions arccos et arcsin sont définies sur I donc $\frac{1-x}{1+x}$ et $\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ doivent appartenir à cet intervalle I. Traduire ensuite ceci sous forme d'inégalités ($x \leqslant y \leqslant z \Leftrightarrow x \leqslant y$ et $y \leqslant z$).
Montrer ensuite que $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 1 \\ \dfrac{2}{(1+x)\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$ (utiliser au maximum les factorisations pour espérer s'en sortir)

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Domaine de définition : La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $1+x^2$ étant positive sur $\mathbb{R}$, le réel $f(x)$ existe ssi $x \neq 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^\times$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ (comme composée et quotients de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^\times$ dont le dénominateur ne s'annule pas) et l'on a pour tout réel x non nul

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)'}{1+\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)^2} = \left[\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\times x - (\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2}\right]\frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2}-1)^2+x^2} \\ &= \frac{x^2-\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2\sqrt{1+x^2}}.\frac{x^2}{1+x^2-2\sqrt{1+x^2}+1+x^2} \\ &= \frac{x^2-1-x^2+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}(1+x^2-\sqrt{1+x^2})} = \frac{-1+\sqrt{x^2+1}}{2(1+x^2)(\sqrt{1+x^2}-1)} = \frac{1}{2(1+x^2)} \end{aligned}$$

On remarque que $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$ est la dérivée de $\dfrac{1}{2}\arctan x$. On en déduit qu'il existe deux constantes C_+ et C_- telles que

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\arctan x + C_- & \forall x < 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}\arctan x + C_+ & \forall x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Remarque : deux fonctions admettant la même dérivée sur un <u>intervalle</u>*, sont égales à une constante additive près, par contre le théorème est faux sur un ensemble quelconque. Par exemple, la fonction* $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ -1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^\times$*, non constante et sa dérivée est nulle sur* $\mathbb{R}^\times$

Pour déterminer C_+ et C_-, de faire tendre x vers $\pm\infty$. Puisque l'on

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x} = \frac{|x|}{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x^2}\right),$$

on en déduit, en utilisant la définition de f, que :

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \begin{cases} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x>0 \\ -\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \tan 1 = \dfrac{\pi}{4} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \tan(-1) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

D'autre part, l'égalité (1) combiné au fait que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arctan x = \pm\dfrac{\pi}{2}$, on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\pi}{2}+C_+ = \dfrac{\pi}{4}+C_+ \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}.(-\dfrac{\pi}{2})+C_- = -\dfrac{\pi}{4}+C_- \end{cases}.$$

Par conséquent, on a nécessairement

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}+C_+ = \dfrac{\pi}{4} \\ -\dfrac{\pi}{4}+C_- = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow C_+ = C_- = 0$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad f(x) = \dfrac{1}{2}\arctan x$.

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.4 : Pour la première équation, il est indispensable d'exiger que $x \in [-1,1]$ (domaine de définition du arcsin). Sous cette hypothèse, on a

$$(E) : \arcsin x = \arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13} \Leftrightarrow x = \sin(\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}) = \sin(\arcsin\frac{4}{5})\cos(\arcsin(\frac{5}{13}))+\cos(\arcsin(\frac{4}{5}))\sin(\arcsin(\frac{5}{13}))$$

En utilisant que $\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arcsin(x)) = x$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, on obtient

$$(E) \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} \times \sqrt{1-(\frac{5}{13})^2} + \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} \times \frac{5}{13} = \frac{4}{5} \times \sqrt{\frac{144}{13^2}} + \sqrt{\frac{9}{5^2}} \times \frac{5}{13} = \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{63}{65} \in [-1,1]$$

donc l'équation (E) admet une et une seule solution qui est $x = \dfrac{63}{65}$.
Pour la seconde équation, on doit exiger que x et $2x$ appartiennent à $[-1,1]$ (domaine de définition de arccos et arcsin), ce qui se traduit par $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ensuite, en utilisant que $\cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1-t^2}$ pour tout $t \in [-1,1]$, ce qui est le cas de x et $2x$, on a

$$(E') : \arccos x = \arcsin 2x \Leftrightarrow x = \cos(\arcsin 2x) \Leftrightarrow x = \sqrt{1-(2x)^2}$$

Cette dernière égalité impose que x est positif (une racine carrée est toujours positive) donc x doit appartenir à $[0, \frac{1}{2}]$. Puisque l'on dispose de l'équivalence $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ lorsque a et b sont positifs (ce qui est le cas avec $a = x$ et $b = \sqrt{1-(2x)^2}$), on en déduit que

$$(E') \Leftrightarrow x^2 = 1-(2x)^2 \Leftrightarrow 5x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Comme les solutions de (E') doivent appartenir à $[0, \frac{1}{2}]$, on peut affirmer que l'équation (E') admet une et une seule solution qui est $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Correction de l'exercice 1.5 : On remarque pour commencer que $\beta^7 = 1$ et que $\overline{\beta} = \beta^{-1}$

1. Puisque $\beta^7 = 1$, on a $\beta^{-k} = \beta^7\beta^{-k} = \beta^{7-k}$. On en déduit que

$$\overline{T} = \overline{\beta}^3 + \overline{\beta}^5 + \overline{\beta}^6 = \beta^{-3} + \beta^{-5} + \beta^{-6} = \beta^{7-3} + \beta^{7-5} + \beta^{7-6} = \beta^4 + \beta^2 + \beta = S$$

   Ensuite, en utilisant que $\sin(\pi - x) = \sin x$, on a

$$\operatorname{Im} S = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7}) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\pi - \frac{8\pi}{7}) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7})$$

   Puisque $0 \leqslant \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} \leqslant \frac{\pi}{2}$ et que la fonction sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que

$$\sin(\frac{\pi}{7}) < \sin(\frac{2\pi}{7}) \Rightarrow \sin(\frac{2\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7}) > 0.$$

   Puisque $\frac{4\pi}{7} \in]0, \pi[$, on est assuré que $\sin\frac{4\pi}{7} > 0$ donc

$$\operatorname{Im} S = \underbrace{\sin(\frac{2\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7})}_{>0} + \underbrace{\sin(\frac{4\pi}{7})}_{>0} > 0$$

2. $S + T = \sum_{k=1}^{k} \beta^k = -1 + \sum_{k=0}^{6} \beta^k = -1$ car β est une racine $7^{ième}$ différente de 1. Ensuite, en utilisant que $\beta^k = \beta^k \underbrace{(\overset{-1}{\beta^7})}_{=1} = \beta^{k-7}$, on a

$$\begin{aligned} ST &= \left(\beta + \beta^2 + \beta^4\right)\left(\beta^3 + \beta^5 + \beta^6\right) = \beta^4 + \beta^5 + \beta^6 + 3\beta^7 + \beta^8 + \beta^9 + \beta^{10} = \beta^4 + \beta^5 + \beta^6 + 3 + \beta + \beta^2 + \beta^3 \\ &= 3 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^6 = 3 + S = 2 \end{aligned}$$

   Les égalités $S + T = -1$ et $ST = 2$ montre que S et T sont les solutions de l'équation

$$X^2 - (S+T)X + ST = 0 \Leftrightarrow X^2 + X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

   Puisque $\operatorname{Im} S > 0$, on en déduit que $S = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$ et $T = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ (T est le conjugué de S d'après 1)

Correction de l'exercice 1.6 : On pose $f(x) = \arccos \dfrac{1-x}{1+x} + \arcsin \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$. Les fonctions arccos et arcsin sont définies sur $[-1,1]$ donc pour que $f(x)$ existe il faut et il suffit que $\dfrac{1-x}{1+x}$ et $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ appartiennent à $[-1,1]$ et que x soit positif (pour que la racine carrée existe). Puisque $x \geqslant 0$, $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ est positif donc il suffit d'avoir $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} \leqslant 1$. Autrement dit $f(x)$ existe ssi

$$\left\{\begin{array}{c} x \geqslant 0 \\ \dfrac{1-x}{1+x} \geqslant -1 \\ \dfrac{1-x}{1+x} \leqslant 1 \\ \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} \leqslant 1 \end{array}\right.$$

En multipliant les trois dernières inégalités par $1+x$, qui est positif car on exige $x \geqslant 0$), on obtient

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \geqslant 0 \\ 1-x \geqslant -1-x \\ 1-x \leqslant 1+x \\ 2\sqrt{x} \leqslant 1+x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cc} x \geqslant 0 & \\ 1 \geqslant -1 & \text{toujours vrai} \\ 0 \leqslant 2x & \\ 0 \leqslant 1 - 2\sqrt{x} + x & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cc} x \geqslant 0 & \\ 0 \leqslant (1-\sqrt{x})^2 & \text{toujours vrai} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geqslant 0$$

d'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$.

Les fonctions arccos et arcsin étant continues sur $[-1,1]$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ et $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ étant continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, les réels $\dfrac{1-x}{1+x}$ et $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ étant dans $[-1,1]$, on est assuré que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Les fonctions arccos et arcsin étant dérivables sur $[-1,1]$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ et $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ étant continues sur $\mathbb{R}_+$ et les réels $\dfrac{1-x}{1+x}$ et $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ étant dans $]-1,1[$ ssi $x \in \mathbb{R}_+^\times$, on en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$.

Sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} \forall x &> 0, \\ f'(x) &= \left(\frac{1-x}{1+x}\right)'(\arccos)'\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)'(\arcsin)'\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \\ &= \frac{-2}{(1+x)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}} + \frac{\dfrac{1+x}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{(1+x)^2}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}}\right] \end{aligned}$$

Puisque $(1+x)$ est positif si $x \geqslant 0$, on a $\sqrt{(1+x)^2} = 1+x$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1+x)^2}\left[\frac{2(1+x)}{\sqrt{(1+x)^2-(1-x)^2}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}} \times \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2-(2\sqrt{x})^2}}\right] \\ &= \frac{1}{1+x}\left[\frac{2}{\sqrt{4x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}\right] = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\left[1 + \frac{(1-x)}{\sqrt{(x-1)^2}}\right] \end{aligned}$$

On remarque que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ et que $\sqrt{(x-1)^2} = \left\{\begin{array}{ll} x-1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 1-x & \text{si } x \leqslant 1 \end{array}\right.$, donc

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\left[1 + \dfrac{1-x}{x-1}\right] & \text{si } x \geqslant 1 \\ \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\left[1 + \dfrac{1-x}{1-x}\right] & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}[1-1] & \text{si } x \geqslant 1 \\ \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}[1+1] & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \geqslant 1 \\ \dfrac{2}{(1+x)\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{array}\right.$$

La fonction f étant continue sur $[0, 1]$ et de dérivée strictement positive sur $]0, 1]$, on peut affirmer qu'elle est strictement croissante sur $[0, 1]$.
Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, la fonction f est constante et cette constante est $f(1) = \arccos 0 + \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$.