1 Exercices

Exercice 1.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^n = \overline{z}$.

Exercice 1.2 Soit a un complexe différent de 1.
En utilisant une méthode similaire au télescopage, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} k(a^{k+1} - a^k)$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} ka^k$.

Exercice 1.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(3kx + 2) = 0$

Exercice 1.4 Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux entiers naturels p_n et q_n tels que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{2p_n + 1}{q_n}$

Exercice 1.5

1. Soit a un réel. Déterminer l'écriture polaire de $\frac{1 + ia}{1 - ia}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^n = \frac{1 + ia}{1 - ia}$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Passer au module pour en déduire le module de z donc z peut s'écrire ...

Indication pour l'exercice 1.2 : "Casser" la somme par linéarité puis effectuer le changement de variable $j = k + 1$ dans la première somme, puis réutiliser la linéarité pour aboutir à une somme connue.
Pour la déduction, factoriser au mieux $a^{k+1} - a^k$ pour en déduire une autre expression de la somme.

Indication pour l'exercice 1.3 : $\cos a = \mathrm{Re}(e^{ia})$ puis utiliser que le binôme pour simplifier la somme ($\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k = \cdots$) (attention à ne pas oublier les divisions par 0)

Indication pour l'exercice 1.4 : Poser l'hypothèse de récurrence

$$(\mathcal{P}_n) \text{ il existe deux entiers naturels } p_n \text{ et } q_n \text{ tels que } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{2p_n + 1}{q_n}$$

puis pour l'hérédité $\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$

Indication pour l'exercice 1.5 :

1. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \cdots$ et $\arg \dfrac{z}{z'} = \cdots$ Ensuite, utiliser que si $z = x + iy$ et $z = \rho e^{i\theta}$ alors $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ (faire un dessin pour s'en convaincre). On obtient ainsi l'angle polaire de z à π près. Ensuite se rappeler dans quel intervalle se localise $\arctan x$, pour x un réel quelconque puis faire un dessin pour localiser θ et enfin obtenir la valeur précise de θ.Soit a un réel. Déterminer l'écriture polaire de $\dfrac{1+ia}{1-ia}$.

2. Ecrire z, z^n et $\dfrac{1+ia}{1-ia}$ en polaire.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.4 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.5 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)