1 Exercices

Exercice 1.1 Soient a et b deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Résoudre les équations suivantes en $x \in \mathbb{R}^3$

1. $a \wedge x = b$
2. $x + a \wedge x = b$

Exercice 1.2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la droite D_λ d'équation cartésienne

$$(1-\lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$$

Montrer qu'il existe un point équidistant à toutes les droites D_λ, λ parcourant $\mathbb{R}$.

Exercice 1.3 Dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé usuel, on considère les plans

$$\begin{gathered} P_1 : x + y = 1 \\ P_2 : y + z = 1 \\ P_3 : z + x = 1 \\ P_4 : x + 3y + z = 0 \end{gathered}$$

ainsi que le point $A(1, 1, \lambda)$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que les projections de A sur les quatre plans soient coplanaires.

Exercice 1.4 On se place dans le plan.
On considère un triangle ABC. On construit le triangle $A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$ de la façon suivante :
$A^{(1)}$ est le milieu de $[AB]$, $B^{(1)}$ est le milieu de $[BC]$, $C^{(1)}$ est le milieu de $[CA]$.
A partir du triangle $A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$, on construit le triangle $A^{(2)}B^{(2)}C^{(2)}$ de la façon suivante :
$A^{(2)}$ est le milieu de $[A^{(1)}B^{(1)}]$, $B^{(2)}$ est le milieu de $[B^{(1)}C^{(1)}]$, $C^{(2)}$ est le milieu de $[C^{(1)}A^{(1)}]$.
On itère indéfiniment ce processus.
Si le triangle $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ est construit, on construit le triangle $A^{(n+1)}B^{(n+1)}C^{(n+1)}$ de la façon suivante :
$A^{(n+1)}$ est le milieu de $[A^{(n)}B^{(n)}]$, $B^{(n+1)}$ est le milieu de $[B^{(n)}C^{(n)}]$, $C^{(n+1)}$ est le milieu de $[C^{(n)}A^{(n)}]$.

1. Construire un triangle ABC puis les triangles $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ pour $n = 1, 2, 3$ et 4.
   Que constate-t-on ? Que se passe-t-il si l'on poursuit indéfiniment le processus ?
2. Montrer que tous les triangles $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ ont le même centre de gravité.
3. Exprimer l'aire du triangle $A^{(n+1)}B^{(n+1)}C^{(n+1)}$ en fonction de l'aire du triangle $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$.
4. Conclusion.
5. Que se passe-t-il si l'on remplace notre triangle intial ABC du plan en un tétrahèdre $ABCD$ de l'espace ?

2 Indications

3 Corrections