1 Exercices

Exercice 1.1 Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

Exercice 1.2 1. Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

2. Déterminer tous les couples de fonctions (f, g) dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(x+y) = f(x)g(y) - g(x)f(y) \\ g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y) \end{cases}$$

Exercice 1.3 Résoudre l'équation différentielle $x(x^2-1)y' + y = x^2$.
Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 1.4 On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y''(x) - 2y(x) = x$
Soit y une solution de (E).

1. On introduit la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y(e^t)$
   (a) Montrer que z est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre
   (b) En déduire z. Sur quel intervalle connait-on y ?
2. En posant $z(t) = y(-e^t)$, refaire la question 1.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

2 Indications

3 Corrections