1 Exercices

Exercice 1.1 Soient a, n et m trois entiers naturels non nuls.

1. Effectuer la division de $a^{nm}+1$ par a^n+1 lorsque m est impair.
2. Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que a^n+1 soit premier, montrer que $\exists k \in \mathbb{N}, \quad n = 2^k$.
3. Montrer par récurence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geqslant 1$ on a :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

4. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
5. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 1.2 Soient a, n, m, q et r cinq entiers naturels tels que $m > n > 0, \quad m = qn + r, \quad 0 \leqslant r < n$

1. Effectuer la division euclidienne de $a^m - 1$ par $a^n - 1$.
2. Déterminer le pgcd de $a^n - 1$ et $a^m - 1$

Exercice 1.3 Soit a un entier naturel. Montrer par récurence que :

$$\forall p \text{ premier}, \forall a \in \mathbb{N}^\times,\ a^p - a \text{ est divisible par } p.$$

Exercice 1.4 1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers a_n et b_n tels que : $(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2} b_n$

2. Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad (a_n)^2 - 2(b_n)^2 = (-1)^n$. Cette relation permet-elle de retrouver le résultat du 2 ?
4. Etude des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad a_{n+1} + b_{n+1} \geqslant 2(a_n + b_n)$.
   (b) Quelle est la suite $(a_n + b_n)_n$? En déduire les limites des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(\frac{a_n}{b_n})_n$.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Effectuer la division de la même façon que la division des polynômes ($a = x$!!). Faire apparaitre la forme du quotient et du reste et prouver le résultat en explicitant le quotient partiel et le reste partiel à la $k^{\text{ème}}$ étape et en prouvant alors que l'étape $(k+1)^{\text{ème}}$ est de la même forme. On obtiendra alors comme reste $(-1)^m + 1$ et comme quotient $a^{(m-1)n} - a^{(m-2)n} + a^{(m-3)n} - \cdots - a + 1$

2. Ecrire n sous la forme $2^k m$ avec m un impair et k le plus grand entier tel que 2^k divise a et utiliser la question précédente.

3. Faire une récurrence sur n (valable pour tout k) et pour l'hérédité, remarquez que $2^{2^{n+1+k}} - 1 = (2^{2^{n+k}})^2 - 1$

4. Utiliser la question 1 pour effectuer la division de F_m par F_n lorsque $m > n$ et en déduire que le seul diviseur possible de F_n et F_m est 1 ou 2.

5. A chaque F_n est associé au moins un diviseur premier p_n et l'application $F_n \mapsto p_n$ est injective (les F_n sont deux à deux premiers entre eux)

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Effectuer la division de la même façon que la division des polynômes ($a = x$!!). Faire apparaitre la forme du quotient et du reste et prouver le résultat en explicitant le quotient partiel et le reste partiel à la $k^{\text{ème}}$ étape et en prouvant alors que l'étape $(k+1)^{\text{ème}}$ est de la même forme. On remarquera que q peut être vu comme le plus grand entier k tel que $m - nk$ soit positif. On obtiendra alors comme reste $a^r - 1$ et comme quotient $a^{m-n} + a^{m-2n} + \cdots + a^r + 1$

2. On constate que $\operatorname{pgcd}(a^m - 1, a^n - 1) = \operatorname{pgcd}(a^n - 1, a^r - 1)$ et que $\operatorname{pgcd}(m, n) = \operatorname{pgcd}(n, r)$. En itérant le processus, la méthode d'Euclide montre que le processus s'achève en un nombre fini d'étape et que le dernier " r " non nul est le $\operatorname{pgcd}(m, n)$, ce qui se transpose sur $a^m - 1, \ldots$

Indication pour l'exercice 1.3 : Procéder par récurrence sur a, utiliser le binôme de Newton (et justifier que si $k \in [\![1, p-1]\!]$, $k! C_k^p$ est un produit d'entiers divisible par p donc C_k^p est divisible par p.

Indication pour l'exercice 1.4 :

1. Procéder par récurrence en explicitant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n ou bien utiliser la formule du binôme de Newton en séparant les exposants pairs des impairs ($\sqrt{2}^{2k} = 2^k$ et $\sqrt{2}^{2k+1} = 2^k\sqrt{2}$)
   Il est conseillé de faire les deux méthodes.

2. Soit on procède par récurrence en utilisant l'expression de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n soit en remarquant que $\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})^n} = (-1)^n(1-\sqrt{2})^n$ et en remarquant que $(1-\sqrt{2})^n$ s'écrit $a'_n + b'_n\sqrt{2}$ et en effectuant le produit $(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n$, on obtient une relation de Bezout sur (a_n, b_n)Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.
   Il est conseillé de faire les deux méthodes.

3. En procédant selon l'une des méthodes de l'exercice 2, on obtient directement le résultat.

4. (a) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n, l'inégalité en découle directement
   (b) Montrer par récurrence que $a_n + b_n \geqslant 2^n(a_0 + b_0)$.
   L'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n fournit la limite de b_{n+1} et l'inégalité $a_{n+1} \geqslant 2b_n$ (qui provient de l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n) donne la limite de a_{n+1}
   (c) Utiliser la question 3 et diviser par b_n.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.4 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)