1 Exercices

Exercice 1.1 On considère un nombre réel x et $\forall n \geq 0$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

- Montrer que pour tout $n > N(x) = E(2|x|)$, $\frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{|x|^{N(x)}}{N(x)!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N(x)}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- On suppose que $x < 0$.
 - Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
 - Quelle conclusion en déduit-on pour la suite (S_n) .
- On suppose dans cette question que $x \geq 0$.
 - Etudier la monotonie de la suite (S_n) .
 - Montrer que la suite (S_n) est majorée.
 - Conclusion

Exercice 1.2 Soit x un réel positif et on considère les suites $(u_n)_n$ et (S_n) définies respectivement par :

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \forall n \geq 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

- Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et expliciter sa limite.
- Comparer les réels $\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ et $\frac{1}{k!}$. Comparer alors les réels u_n et S_n .
- Montrer que $\forall n \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S_n \leq e^x$.
- En déduire la convergence de la suite (S_n) ainsi que sa limite.

Exercice 1.3 On considère la suite $(T_n)_n$ définie par $\forall n \geq 0, \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

- Montrer que la suite est majorée et croissante en déduire sa convergence.
On souhaite désormais expliciter $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

2. Première méthode :

Montrer que

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

3. Deuxième méthode :

- Montrer que les suites $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $K_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ sont adjacentes.
- Calculer $H_{2n} - H_n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

- Justifier que $\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{x^n}{n!} \right|$ pour n assez grand, puis effectuer une récurrence
- Etudier le signe de $S_{2n+2} - S_{2n}$ et $S_{2n+3} - S_{2n+1}$ (on obtiendra dans chacun des deux termes résiduels et on factorisera au mieux)
 - Voir le cours sur les suites adjacentes et sur les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1})
- RAS
 - Ecrire S_n comme deux sommes : une portant de 0 à $N(x)$ (donc indépendante de n) l'autre sur les termes restants, pour ceux-ci utiliser la majoration du 1
 - Théorème de monotonie

Indication pour l'exercice 1.2 :

- Utiliser $\ln u_n$ et l'équivalent de $\ln(1+x)$ en 0
- $$\frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{n-k+1}{n}$$

Pour la seconde question, si $a_k \leq b_k$ alors $\sum_k a_k \leq \sum_k b_k$ (si on regarde bien u_n est aussi une somme)
- Procéder par récurrence en introduisant la fonction $T_n(x) = S_n - e^x$. Pour l'hérédité, étudier les variations de T_{n+1} (sa dérivée est T_n) puis évaluer cette fonction en 0
- Théorème d'encadrement

Indication pour l'exercice 1.3 :

- Effectuer le changement de variable $j = k + 1$ dans T_{n+1} pour en déduire l'expression simplifiée de $T_{n+1} - T_n$ (il doit rester trois termes)
Pour la majoration, remarquer que $a_1 + a_2 + \dots + a_N \leq N \max_k a_k$
- Etudier les variations des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x+1} - (\ln(x+1) - \ln x)$ et $x \mapsto (\ln(x+1) - \ln x) - \frac{1}{x}$ puis placer les limites aux bornes.
En remplaçant x par k et en sommant, on obtient la limite
- Utiliser l'encadrement (des fonctions) de la question 2 pour obtenir la monotonie de H et K
 - RAS

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)