1 Exercices

Exercice 1.1 On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$, et pour $i \in [\![1,3]\!]$, on pose $F_i = \{P \in E \quad / \quad \forall j \in [\![1,3]\!] \backslash \{i\}, \quad P(j) = 0\}$

1. Montrer que F_i est un espace vectoriel.
2. Montrer que $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = E$

Exercice 1.2 On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on note $\mathcal{C}(J) = \{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \text{ tel que } JM = MJ\}$

1. Montrer que $\mathcal{C}(J)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
2. Montrer que si $\mathcal{C}(J) = \{a + bJ + cJ^2, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$

Exercice 1.3

1. Soient a et b deux réels, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f \circ f - (a+b)f + ab\,\mathrm{Id} = 0$$

   Montrer que $E = \ker(f - a\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f - b\,\mathrm{Id})$

2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f^3 + f = 0 \qquad (f \circ f \circ f + f = 0)$$

   (a) Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id})$

   (b) Si $\ker f = \{0\}$, est-on certain de f est surjective ?

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. caractérisation des sous-espaces et $\lambda P+\mu Q)(j)=\lambda P(j)+\mu Q(j)=\cdots$
2. Procéder par analyse en supposant que $P=P_1+P_2+P_3$ où $P_i\in F_i$. Evaluer en $1,2,3$ pour obtenir les valeurs de $P_1(1)$, $P_2(2)$ et $P_3(3)$ puis déterminer les racines évidentes de P_1, P_2, P_3 (ils appartiennent aux différents espaces F_i) pour avoir la forme explicite des P_i, ce qui fournit l'unicité. L'existence résulte de l'explicitation des P_i

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Caractérisation des sous-espaces et $(\lambda M+\mu N)J=\lambda MJ+\mu NJ=\cdots$
2. Calculer explicitement MJ et JM en terme de coefficients, en déduire la forme des coefficients de M et en déduire une famille génératrice. Vérifier qu'il s'agit de I,J,J^2

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Remarquer pour commencer que
$$y\in\ker(f-a\,\mathrm{Id})\Leftrightarrow(f-a\,\mathrm{Id})(y)=0\Leftrightarrow f(y)-ay=0\Leftrightarrow f(y)=ay$$
Procéder par analyse avec $x=y+z$, $y\in\ker(f-a\,\mathrm{Id})$ et $z\in\ker(f-b\,\mathrm{Id})$, composer par f pour obtenir une expression de $f(x)$ en fonction de y et z. On obtient ainsi deux équations à deux inconnues (y,z) dépendant de x et $f(x)$. En déduire l'expression de y et z en fonction de x et $f(x)$. Procéder alors à l'analyse (on n'oubliera pas de vérifier que $f(y)=ay$ et $f(z)=bz$)
2. (a) Procéder comme à la question 1, en composant une fois par f et une fois par f^2 ($z\in\ker(f^2+\mathrm{Id})\Leftrightarrow f^2(z)=-z$)
   (b) Un élément de $\ker(f^2+\mathrm{Id})$ est nécessairement un élément de l'image de f

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)