1 Exercices

Exercice 1.1 On considère $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ ainsi que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de E définie par

$$P_0(X) = 1, \text{ et si } k \geqslant 1, \quad P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$$

1. Montrer que, si $n = 3$, $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de E_n.
2. Montrer que ce résultat reste vrai pour n quelconque.
3. On dit qu'une famille de polynômes $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $E = \mathbb{R}[X]$ est échelonnée en degré si

$$\forall k \in \{0, .., n\}, \quad \deg P_{k+1} > \deg P_k.$$

   Montrer que toute famille échelonnée en degré de E est libre dans E.

Exercice 1.2 Soient $a_1 < ... < a_n$ des nombres réels.

1. Montrer que la famille $(x \to e^{a_i x}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que la famille $(x \mapsto |x - a_i|, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exercice 1.3 $E = \mathbb{R}_n[X]$. Considérons $P_0(X) = 1$ et $\forall k \in \{1, .., n\}$, $P_k(X) = \dfrac{X(X-1)..(X-k+1)}{k!}$

1. Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E.
2. Soit $\Delta : \begin{array}{c} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{array}$.
   (a) Calculer soigneusement ΔP_k
   (b) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} (\Delta^k P)(0) P_k(X).$
   (c) Donner les applications coordonnées associées à la famille (P_k)

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Développer la combinaison, regrouper selon les puissances de X, aboutir à un beau système linéaire 4×4 que l'on résoud en utilisant le pivot de Gauss

2. Deux techniques :
vous êtes un surdoué du calcul et la manipulation de n formules du binôme associé au regroupement de n termes, pour aboutir à un superbe système $n \times n$, allez-y :=) (PS : j'ai une matrice 70×70 à inverser mais mon pc m'a planté, vous êtes le(la) candidat(e) idéal(e) car j'ai besoin du résultat demain matin).
En fait, c'est faisable puisque l'on aboutit à un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls donc il est de Cramer et, comme il est homogène, son unique solution est le n-uplet $(0, .., 0)$
Vous n'êtes pas un surdoué du calcul (ou vous n'aimez pas le calcul) : Evaluer l'égalité en $X = 0$ pour en déduire l'annulation d'un des coefficients de la combinaison. Réécrire alors la combinaison, factoriser par X pour en déduire une relation entre $n - 1$ polynômes. Itérer le processus

3. Si vous êtes analyste dans l'âme : Supposer que $\lambda_n \neq 0$ alors l'équivalent, lorsque $x \to +\infty$, de $\lambda_n P_n + \cdots + \lambda_0 P_0$ est non nul, or la fonction $\lambda_n P_n + \cdots + \lambda_0 P_0$ est nulle donc $\lambda_n = 0$ et procéder par itération
Si vous êtes algébriste dans l'âme, Supposer que $\lambda_n \neq 0$ alors le polynôme $\lambda_n P_n + \cdots + \lambda_0 P_0$ est non nul (car son coefficient est ..) or la fonction $\lambda_n P_n + \cdots + \lambda_0 P_0$ est nulle donc $\lambda_n = 0$ et procéder par itération
Si vous êtes géomètre dans l'âme : je vous laisse trouver une preuve car je n'en ai pas !!!

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Supposer que $\lambda_n \neq 0$ alors l'équivalent, lorsque $x \to +\infty$, de $\lambda_n e^{a_n x} + \cdots + \lambda_0 e^{a_0 x}$ est non nul. Or la fonction $\lambda_n e^{a_n x} + \cdots + \lambda_0 e^{a_0 x}$ est nulle donc $\lambda_n = 0$ et procéder par itération.

2. Utiliser la fonction $x \mapsto |x - a_i|$ est dérivable en a_j si $i \neq j$ et non dérivable en a_i.

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Procéder par récurrence sur n et considérer pour l'hérédité le degré de la combinaison linéaire si $\lambda_{n+1} \neq 0$

2. (a) Faire quelques exemples concrets pour voir ($k = 1, 2, 3$) pour intuiter la formule générale puis la montrer (ce n'est guère plus difficiles que les cas concrets, il faut seulement être soigneux)
   (b) Les P_k forment une base donc P est une combinaison de ces polynômes. Evaluer en 0 pour obtenir le coefficient de P_0, composer par Δ puis évaluer en 0 pour obtenir le coefficient de P_1, composer par Δ^2 puis évaluer en 0 pour obtenir le coefficient de P_2, itérer.
   (c) Revoir le cours sur les applications coordonnées (dites aussi formes linéaires coordonnées)

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)