1 Exercices

Exercice 1.1 Continuité et prolongement possible de $x \mapsto x^{1+1/x}$

Exercice 1.2 $E = \mathbb{R}_n[X]$. Considérons $P_0(X) = 1$ et $\forall k \in \{1, .., n\}$, $P_k(X) = \dfrac{X(X-1)..(X-k+1)}{k!}$

1. Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E.
2. Soit $\Delta : \begin{array}{c} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{array}$.
   (a) Calculer soigneusement ΔP_k
   (b) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(X) = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k P)(0) P_k(X)$.
   (c) Donner les applications coordonnées associées à la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$

Exercice 1.3 On suppose que f est continue en 0 et que

$$\forall (x, y) \in I, \quad f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$$

1. Calculer $f(0)$. Montrer qu'il existe un intervalle $]-a, a[$ sur lequel $|f(x)| < \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $]-a, a[$.

Exercice 1.4 Soient $a_1 < ... < a_n$ des nombres réels.

1. Montrer que la famille $(x \to e^{a_i x}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que la famille $(x \mapsto |x - a_i|, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exercice 1.5 Montrer que la famille $(1, e^x, .., e^{nx})$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 1.6
1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation (E_n) : $x^n + 1 = nx$ admet une unique solution $u_n \in [0, 1]$
2. Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$
3. En déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim_{n \to +\infty} n u_n$.

Exercice 1.7 On suppose que f est continue en 1 et que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{\times}$.
2. Déterminer f sur l'ensemble des entiers naturels puis sur l'ensemble des rationnels et enfin sur l'ensemble des réels

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Continuité et prolongement possible de $x \mapsto x^{1+1/x}$

Indication pour l'exercice 1.2 : $E = \mathbb{R}_n[X]$. Considérons $P_0(X) = 1$ et $\forall k \in \{1, .., n\}$, $P_k(X) = \dfrac{X(X-1)..(X-k+1)}{k!}$

1. Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E.
2. Soit $\Delta : \begin{array}{c} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{array}$.
   (a) Calculer soigneusement ΔP_k
   (b) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} (\Delta^k P)(0) P_k(X)$.
   (c) Donner les applications coordonnées associées à la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$

Indication pour l'exercice 1.3 : On suppose que f est continue en 0 et que

$$\forall (x, y) \in I, \quad f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$$

1. Calculer $f(0)$. Montrer qu'il existe un intervalle $]-a, a[$ sur lequel $|f(x)| < \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $]-a, a[$.

Indication pour l'exercice 1.4 : Soient $a_1 < ... < a_n$ des nombres réels.

1. Montrer que la famille $(x \to e^{a_i x}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que la famille $(x \mapsto |x - a_i|, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Indication pour l'exercice 1.5 : Montrer que la famille $(1, e^x, .., e^{nx})$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Indication pour l'exercice 1.6 :

1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation $(E_n) : x^n + 1 = nx$ admet une unique solution $u_n \in [0, 1]$
2. Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n$.

Indication pour l'exercice 1.7 : On suppose que f est continue en 1 et que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{\times}$.
2. Déterminer f sur l'ensemble des entiers naturels puis sur l'ensemble des rationnels et enfin sur l'ensemble des réels

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Continuité et prolongement possible de $x \mapsto x^{1+1/x}$

Correction de l'exercice 1.2 : $E = \mathbb{R}_n[X]$. Considérons $P_0(X) = 1$ et $\forall k \in \{1,..,n\}$, $P_k(X) = \dfrac{X(X-1)..(X-k+1)}{k!}$

1. Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de E.
2. Soit $\Delta : \begin{array}{c} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{array}$.
   (a) Calculer soigneusement ΔP_k
   (b) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} (\Delta^k P)(0) P_k(X)$.
   (c) Donner les applications coordonnées associées à la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$

Correction de l'exercice 1.3 : On suppose que f est continue en 0 et que

$$\forall (x,y) \in I, \quad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$$

1. Calculer $f(0)$. Montrer qu'il existe un intervalle $]-a,a[$ sur lequel $|f(x)| < \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $]-a,a[$.

Correction de l'exercice 1.4 : Soient $a_1 < ... < a_n$ des nombres réels.

1. Montrer que la famille $(x \to e^{a_i x}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Montrer que la famille $(x \mapsto |x-a_i|, \quad 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Correction de l'exercice 1.5 : Montrer que la famille $(1, e^x, .., e^{nx})$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 1.6 :

1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation $(E_n) : x^n + 1 = nx$ admet une unique solution $u_n \in [0,1]$
2. Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

Correction de l'exercice 1.7 : On suppose que f est continue en 1 et que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^\times$.
2. Déterminer f sur l'ensemble des entiers naturels puis sur l'ensemble des rationnels et enfin sur l'ensemble des réels