1 Exercices

Exercice 1.1 On considère l'application $\Delta : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \to & P(X+1) - \lambda P(X) \end{array}$

1. Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
2. Pour quelles valeurs de λ s'agit-il d'un isomorphisme ?
3. Caractériser son image lorsque $\lambda = 1$
4. Montrer que pour tout entier naturel k, il existe un polynôme P_k tel que
$$\deg P_k = k + 1 \qquad \text{et} \qquad P_k(X+1) - P_k(X) = X^k$$
5. En déduire que les sommes $S_k(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i^k$ dépendent polynômialement de n et expliciter $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ et $S_4(n)$

Exercice 1.2 Montrer que la fonction $f(t) = \dfrac{t}{1 - e^{-t}}$ se prolonge en une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer

Exercice 1.3 Vérifier que $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Déterminer son noyau puis expliciter son image

Exercice 1.4 Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\Delta : \begin{array}{c} E \to E \\ u \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n \geqslant 0} \end{array}$

1. Déterminer $\ker(\Delta)$ et $\ker(\Delta^2)$. Quels sont leurs dimensions.
2. Montrer que l'application $\Delta_k = \Delta_{|\ker(\Delta^k)}$ est une application linéaire de Δ^k dans Δ^{k+1}.
3. Quel est son rang ? Déterminer $\forall k \geqslant 1$ la dimension de $\ker(\Delta^k)$ puis expliciter une base de $\ker(\Delta^k)$
4. Déterminer toutes les suites tels que $u_{n+4} - 4u_{n+3} + 6u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : On considère l'application $\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \to & P(X+1) - \lambda P(X) \end{array}$

1. Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
2. Pour quelles valeurs de λ s'agit-il d'un isomorphisme ?
3. Caractériser son image lorsque $\lambda = 1$
4. Montrer que pour tout entier naturel k, il existe un polynôme P_k tel que
$$\deg P_k = k+1 \qquad \text{et} \qquad P_k(X+1) - P_k(X) = X^k$$
5. En déduire que les sommes $S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$ dépendent polynômialement de n et expliciter $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ et $S_4(n)$

Indication pour l'exercice 1.2 : Montrer que la fonction $f(t) = \dfrac{t}{1-e^{-t}}$ se prolonge en une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer

Indication pour l'exercice 1.3 : Vérifier que $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer son noyau puis expliciter son image

Indication pour l'exercice 1.4 : Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\Delta : \begin{array}{c} E \to E \\ u \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n \geqslant 0} \end{array}$

1. Déterminer $\ker(\Delta)$ et $\ker(\Delta^2)$. Quels sont leurs dimensions.
2. Montrer que l'application $\Delta_k = \Delta_{|\ker(\Delta^k)}$ est une application linéaire de Δ^k dans Δ^{k+1}.
3. Quel est son rang ? Déterminer $\forall k \geqslant 1$ la dimension de $\ker(\Delta^k)$ puis expliciter une base de $\ker(\Delta^k)$
4. Déterminer toutes les suites tels que $u_{n+4} - 4u_{n+3} + 6u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : On considère l'application $\Delta : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \to & P(X+1) - \lambda P(X) \end{array}$

1. Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
2. Pour quelles valeurs de λ s'agit-il d'un isomorphisme ?
3. Caractériser son image lorsque $\lambda = 1$
4. Montrer que pour tout entier naturel k, il existe un polynôme P_k tel que
$$\deg P_k = k+1 \qquad \text{et} \qquad P_k(X+1) - P_k(X) = X^k$$
5. En déduire que les sommes $S_k(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i^k$ dépendent polynômialement de n et expliciter $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ et $S_4(n)$

Correction de l'exercice 1.2 : Montrer que la fonction $f(t) = \dfrac{t}{1-e^{-t}}$ se prolonge en une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer

Correction de l'exercice 1.3 : Vérifier que $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Déterminer son noyau puis expliciter son image

Correction de l'exercice 1.4 : Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\Delta : \begin{array}{c} E \to E \\ u \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n \geqslant 0} \end{array}$

1. Déterminer $\ker(\Delta)$ et $\ker(\Delta^2)$. Quels sont leurs dimensions.
2. Montrer que l'application $\Delta_k = \Delta_{|\ker(\Delta^k)}$ est une application linéaire de Δ^k dans Δ^{k+1}.
3. Quel est son rang ? Déterminer $\forall k \geqslant 1$ la dimension de $\ker(\Delta^k)$ puis expliciter une base de $\ker(\Delta^k)$
4. Déterminer toutes les suites tels que $u_{n+4} - 4u_{n+3} + 6u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$