1 Exercices

Exercice 1.1 1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est bornée. Que peut-on dire de f ?

2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $a > 0$.

   (a) On suppose que $f'(x) + af(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$
   Que dire de f

   (b) On suppose que $f'(x) + af(x) \to l$ quand $x \to +\infty$. Que dire de f ?

3. Soit f une fonction C^1 et bornée sur $\mathbb{R}$. On suppose que f' possède une limite finie en $+\infty$.
   Que peut-on dire de cette limite ?

Exercice 1.2 La fonction f définie par : $f(x) = x^{1+1/x}$ se prolonge-t-elle de façon C^1 à $\mathbb{R}_+$?

Exercice 1.3 Soit f une fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, $a < b < c$ des points de $[a, b]$.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $\zeta \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(t) = f(a)\frac{(t-b)(t-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(t-a)(t-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(t-a)(t-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(t-a)(t-b)(t-c)}{6}f^{(3)}(\zeta)$$

Exercice 1.4 Pour tout entier n, on pose $L_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$

1. Justifier, **sans effectuer de calculs**, L_1, L_2 et L_3 admettent respectivement une, deux et trois racines dans $]-1, 1[$.

2. Montrer que L_n possède n zéros distincts appartenant à $]-1, 1[$.

Exercice 1.5 1. Montrer que $\varphi : P \mapsto \dfrac{P(X) - P(1)}{X - 1}$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Est-ce un automorphisme ? Caractériser son image.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est bornée. Que peut-on dire de f ?
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $a > 0$.
   (a) On suppose que $f'(x) + af(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$
   Que dire de f
   (b) On suppose que $f'(x) + af(x) \to l$ quand $x \to +\infty$. Que dire de f ?
3. Soit f une fonction C^1 et bornée sur $\mathbb{R}$. On suppose que f' possède une limite finie en $+\infty$.
   Que peut-on dire de cette limite ?

Indication pour l'exercice 1.2 : La fonction f définie par : $f(x) = x^{1+1/x}$ se prolonge-t-elle de façon C^1 à $\mathbb{R}_+$?

Indication pour l'exercice 1.3 : Soit f une fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, $a < b < c$ des points de $[a, b]$.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $\zeta \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(t) = f(a)\frac{(t-b)(t-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(t-a)(t-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(t-a)(t-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(t-a)(t-b)(t-c)}{6}f^{(3)}(\zeta)$$

Indication pour l'exercice 1.4 : Pour tout entier n, on pose $L_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$

1. Justifier, **sans effectuer de calculs**, L_1, L_2 et L_3 admettent respectivement une, deux et trois racines dans $]-1, 1[$.
2. Montrer que L_n possède n zéros distincts appartenant à $]-1, 1[$.

Indication pour l'exercice 1.5 :

1. Montrer que $\varphi : P \mapsto \dfrac{P(X) - P(1)}{X - 1}$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Est-ce un automorphisme ? Caractériser son image.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est bornée. Que peut-on dire de f ?
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $a > 0$.
   (a) On suppose que $f'(x) + af(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$
   Que dire de f
   (b) On suppose que $f'(x) + af(x) \to l$ quand $x \to +\infty$. Que dire de f ?
3. Soit f une fonction C^1 et bornée sur $\mathbb{R}$. On suppose que f' possède une limite finie en $+\infty$.
   Que peut-on dire de cette limite ?

Correction de l'exercice 1.2 : La fonction f définie par : $f(x) = x^{1+1/x}$ se prolonge-t-elle de façon C^1 à $\mathbb{R}_+$?

Correction de l'exercice 1.3 : Soit f une fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, $a < b < c$ des points de $[a, b]$.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $\zeta \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(t) = f(a)\frac{(t-b)(t-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(t-a)(t-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(t-a)(t-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(t-a)(t-b)(t-c)}{6}f^{(3)}(\zeta)$$

Correction de l'exercice 1.4 : Pour tout entier n, on pose $L_n(x) = ((x^2-1)^n)^{(n)}$

1. Justifier, **sans effectuer de calculs**, L_1, L_2 et L_3 admettent respectivement une, deux et trois racines dans $]-1, 1[$.
2. Montrer que L_n possède n zéros distincts appartenant à $]-1, 1[$.

Correction de l'exercice 1.5 :

1. Montrer que $\varphi : P \mapsto \dfrac{P(X) - P(1)}{X - 1}$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Est-ce un automorphisme ? Caractériser son image.