1 Exercices

Exercice 1.1 **Exercice 1.2** Etudier la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^3 + 1}{3}$ avec $u_0 = 0$

Exercice 1.3 Soit $h \in \mathbb{R}$, on considère résoudre le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{1} + \dfrac{a_1}{2} + .. + \dfrac{a_n}{n+1} = h \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_1}{3} + .. + \dfrac{a_n}{n} = 0 \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{a_1}{4} + .. + \dfrac{a_n}{n+2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{a_1}{k+2} + .. + \dfrac{a_n}{k+n+1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{a_1}{n+2} + .. + \dfrac{a_n}{2n+1} \end{array} \right.$$

On introduit pour cela la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{a_1}{X+2} + .. + \dfrac{a_n}{X+n+1}$

1. Déterminer explicitement le polynôme P tel que $F(X) = \dfrac{P(X)}{(X+1)\cdots(X+n+1)}$
2. En déduire la valeur de $a_1, ., a_n$.

Exercice 1.4 On considère un polynôme unitaire P de degré n possédant n racines simples $a_1, .., a_n$ toutes non nulles Calculer les sommes suivantes

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i P'(a_i)} \quad B = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)} \quad C = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{P'(a_i)}$$

2 Indications

Indication pour l'exercice : Etudier la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^3 + 1}{3}$ avec $u_0 = 0$

Indication pour l'exercice : Soit $h \in \mathbb{R}$, on considère résoudre le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{1} + \dfrac{a_1}{2} + .. + \dfrac{a_n}{n+1} = h \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_1}{3} + .. + \dfrac{a_n}{n} = 0 \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{a_1}{4} + .. + \dfrac{a_n}{n+2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{a_1}{k+2} + .. + \dfrac{a_n}{k+n+1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{a_1}{n+2} + .. + \dfrac{a_n}{2n+1} \end{array} \right.$$

On introduit pour cela la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{a_1}{X+2} + .. + \dfrac{a_n}{X+n+1}$

1. Déterminer explicitement le polynôme P tel que $F(X) = \dfrac{P(X)}{(X+1)\cdots(X+n+1)}$
2. En déduire la valeur de $a_1, ., a_n$.

Indication pour l'exercice : On considère un polynôme unitaire P de degré n possédant n racines simples $a_1, .., a_n$ toutes non nulles
Calculer les sommes suivantes

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i P'(a_i)} \quad B = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)} \quad C = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{P'(a_i)}$$

3 Corrections

Correction de l'exercice : Etudier la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^3 + 1}{3}$ avec $u_0 = 0$

Indication pour l'exercice : Soit $h \in \mathbb{R}$, on considère résoudre le système

$$(S) : \begin{cases} \dfrac{1}{1} + \dfrac{a_1}{2} + .. + \dfrac{a_n}{n+1} = h \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_1}{3} + .. + \dfrac{a_n}{n} = 0 \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{a_1}{4} + .. + \dfrac{a_n}{n+2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{a_1}{k+2} + .. + \dfrac{a_n}{k+n+1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{a_1}{n+2} + .. + \dfrac{a_n}{2n+1} \end{cases}$$

On introduit pour cela la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{a_1}{X+2} + .. + \dfrac{a_n}{X+n+1}$

1. Déterminer explicitement le polynôme P tel que $F(X) = \dfrac{P(X)}{(X+1)\cdots(X+n+1)}$
2. En déduire la valeur de $a_1, ., a_n$.

Correction de l'exercice : On considère un polynôme unitaire P de degré n possédant n racines simples $a_1, .., a_n$ toutes non nulles
Calculer les sommes suivantes

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i P'(a_i)} \quad B = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(a_i)} \quad C = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{P'(a_i)}$$