1 Exercices

Exercice 1.1 On considère

- l'application linéaire $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z)$
- la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- la famille $\mathcal{C} = [(1, -2, 1), (1, 1, 1), (0, -1, 1)]$

1. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice $A = mat(f, \mathcal{B})$ et $B = mat(f, \mathcal{C})$ et expliciter la relation les liant.
3. Donner les coordonnées du vecteur $(3, 1, 7)$ dans la base $\mathcal{C}$
4. **Difficile :** Existe-t-il une matrice R inversible telle que $A = R \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} R^{-1}$. Si oui, expliciter une telle matrice R.
   Même question avec $A = R \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} R$?

Exercice 1.2 On considère

- l'application linéaire $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (5x + y + 2z, -x + 7y + 2z, x + y + 6z)$
- la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- la famille $\mathcal{C} = [(1, 1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, 1)]$

1. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice $A = mat(f, \mathcal{B})$ et $B = mat(f, \mathcal{C})$ et expliciter la relation les liant.
3. Donner les coordonnées du vecteur $(3, 1, 7)$ dans la base $\mathcal{C}$
4. **Difficile :** Existe-t-il une matrice R inversible telle que $A = R \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} R^{-1}$? Si oui, expliciter une telle matrice.
   Même question avec $A = R \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} R^{-1}$

Exercice 1.3 On considère

- l'application linéaire $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (10x - 6y - 3z, -4x + 12y + 2z, -4x - 4y + 6z)$
- la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- la famille $\mathcal{C} = [(3, 0, 6), (0, -2, 4), (-6, 6, 0)]$

1. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice $A = mat(f, \mathcal{B})$ et $B = mat(f, \mathcal{C})$ et expliciter la relation les liant.
3. Donner les coordonnées du vecteur $(3, 1, 7)$ dans la base $\mathcal{C}$
4. **Difficile :** Existe-t-il une matrice R inversible telle que $A = R \begin{pmatrix} 20 & -12 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix} R^{-1}$. Si oui, expliciter une telle matrice R.
   Même question avec $A = R \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix} R$?

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : On considère

- l'application linéaire $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z)$
- la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- la famille $\mathcal{C} = [(1, -2, 1), (1, 1, 1), (0, -1, 1)]$

1. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice $A = mat(f, \mathcal{B})$ et $B = mat(f, \mathcal{C})$ et expliciter la relation les liant.
3. Donner les coordonnées du vecteur $(3, 1, 7)$ dans la base $\mathcal{C}$
4. **Difficile :** Existe-t-il une matrice R inversible telle que $A = R \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} R^{-1}$. Si oui, expliciter une telle matrice R.
   Même question avec $A = R \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} R$?

Indication pour l'exercice 1.2 : On considère

- l'application linéaire $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (5x + y + 2z, -x + 7y + 2z, x + y + 6z)$
- la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- la famille $\mathcal{C} = [(1, 1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, 1)]$

1. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice $A = mat(f, \mathcal{B})$ et $B = mat(f, \mathcal{C})$ et expliciter la relation les liant.
3. Donner les coordonnées du vecteur $(3, 1, 7)$ dans la base $\mathcal{C}$
4. **Difficile :** Existe-t-il une matrice R inversible telle que $A = R \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} R^{-1}$? Si oui, expliciter une telle matrice.
   Même question avec $A = R \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} R^{-1}$

Indication pour l'exercice 1.3 : On considère

- l'application linéaire $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (10x - 6y - 3z, -4x + 12y + 2z, -4x - 4y + 6z)$
- la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- la famille $\mathcal{C} = [(3, 0, 6), (0, -2, 4), (-6, 6, 0)]$

1. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice $A = mat(f, \mathcal{B})$ et $B = mat(f, \mathcal{C})$ et expliciter la relation les liant.
3. Donner les coordonnées du vecteur $(3, 1, 7)$ dans la base $\mathcal{C}$
4. **Difficile :** Existe-t-il une matrice R inversible telle que $A = R \begin{pmatrix} 20 & -12 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix} R^{-1}$. Si oui, expliciter une telle matrice R.
   Même question avec $A = R \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix} R$?

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : On considère

- l'application linéaire $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z)$
- la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- la famille $\mathcal{C} = [(1, -2, 1), (1, 1, 1), (0, -1, 1)]$

1. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice $A = mat(f, \mathcal{B})$ et $B = mat(f, \mathcal{C})$ et expliciter la relation les liant.
3. Donner les coordonnées du vecteur $(3, 1, 7)$ dans la base $\mathcal{C}$
4. **Difficile :** Existe-t-il une matrice R inversible telle que $A = R \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} R^{-1}$. Si oui, expliciter une telle matrice R.
   Même question avec $A = R \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} R$?

Correction de l'exercice 1.2 : On considère

- l'application linéaire $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (5x + y + 2z, -x + 7y + 2z, x + y + 6z)$
- la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- la famille $\mathcal{C} = [(1, 1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, 1)]$

1. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice $A = mat(f, \mathcal{B})$ et $B = mat(f, \mathcal{C})$ et expliciter la relation les liant.
3. Donner les coordonnées du vecteur $(3, 1, 7)$ dans la base $\mathcal{C}$
4. **Difficile :** Existe-t-il une matrice R inversible telle que $A = R \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} R^{-1}$? Si oui, expliciter une telle matrice.
   Même question avec $A = R \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} R^{-1}$

Correction de l'exercice 1.3 : On considère

- l'application linéaire $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (10x - 6y - 3z, -4x + 12y + 2z, -4x - 4y + 6z)$
- la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- la famille $\mathcal{C} = [(3, 0, 6), (0, -2, 4), (-6, 6, 0)]$

1. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice $A = mat(f, \mathcal{B})$ et $B = mat(f, \mathcal{C})$ et expliciter la relation les liant.
3. Donner les coordonnées du vecteur $(3, 1, 7)$ dans la base $\mathcal{C}$
4. **Difficile :** Existe-t-il une matrice R inversible telle que $A = R \begin{pmatrix} 20 & -12 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 12 & -12 & 4 \end{pmatrix} R^{-1}$. Si oui, expliciter une telle matrice R.
   Même question avec $A = R \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix} R$?