1 Exercices

Exercice 1.1 Soit une famille $(a_k)_k$ de complexes.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - na_n$.
2. En choisissant pour la suite $(a_k)_k$ une suite géométrique, en déduire une identité remarquable.

Exercice 1.2 Soient α et β deux réels. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos(p\alpha + (n-p)\beta)$

Exercice 1.3

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\displaystyle\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$.
2. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

Exercice 1.4 Déterminer les solutions de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{2005} \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^k = 0$

Exercice 1.5

1. Montrer que pour tout entier r de $[\![1, n]\!]$, on a : $\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$.
2. Pour tout réel x de $]0,1[$, on définit la fonction $f_{r,n}$ par : $f_{r,n}(x) = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k$.
   (a) Montrer, pour tout réel x de $]0;1[$, l'égalité : $(1-x)f_{r,n}(x) = xf_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r} x^{n+1}$.
   (b) On admet dans cette question $\lim_{n\to+\infty} \binom{n}{r} x^{n+1} = 0$ lorsque $x \in [0,1[$.
   Montrer que $\forall r \in \mathbb{N}$, la suite $[f_{r,n}(x)]_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et expliciter sa limite en fonction de x et de r.

Exercice 1.6 Soit ζ tel que $\zeta^n = 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|\zeta^k - 1\right|$.

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)