1 Exercices

Exercice 1.1 1. Déterminer toutes les solutions entières positives de $127x + 15y = 600$

2. Existence de solutions entières positives de $nx + my = nm - 1$ lorsque $\text{pgcd}(n, m) = 1$

Exercice 1.2 1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers a_n et b_n tels que : $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}b_n$

2. Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad (a_n)^2 - 2(b_n)^2 = (-1)^n$. Cette relation permet-elle de retrouver le résultat du 2 ?
4. Etude des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad a_{n+1} + b_{n+1} \geqslant 2(a_n + b_n)$.
   (b) Quelle est la suite $(a_n + b_n)_n$? En déduire les limites des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(\frac{a_n}{b_n})_n$

Exercice 1.3 Soient $a \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, n, m, q, r quatres entiers naturels vérifiant $n = mq + r$ avec $1 \leqslant m \leqslant n$ et $0 \leqslant r < m$

1. Effectuer la division euclidienne de $a^n - 1$ par $a^m - 1$
2. Ecrire l'algorithme d'Euclide pour calculer $\text{pgcd}(127, 15)$ ainsi que $\text{pgcd}(a^{127} - 1, a^{15} - 1)$
3. En déduire $\text{pgcd}(a^n - 1, a^m - 1)$.

Exercice 1.4 Soit p un nombre premier.
Soit $k \in [\![1, p - 1]\!]$. On note r_k le reste de la division euclidienne de $\dfrac{(p-1)!}{k}$ par p.

1. Justifier rapidement que $\dfrac{(p-1)!}{k}$ est un entier
2. Montrer que $k \mapsto r_k$ est une bijection de $[\![1, p - 1]\!]$ sur lui-même.
   En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{p-1} r_k = \sum\limits_{k=1}^{p-1} k$.
3. Soit N l'entier naturel tel que $\sum\limits_{k=1}^{p-1} \dfrac{1}{k} = \dfrac{N}{(p-1)!}$. Montrer que p divise N

Exercice 1.5 Soient a, n et m trois entiers naturels non nuls.

1. Effectuer la division de $a^{nm} + 1$ par $a^n + 1$.
2. Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^n + 1$ soit premier, montrer que :
   (a) l'entier n est pair.
   (b) En écrivant $n = 2^k m$ avec m impair, montrer que $m = 1$.
3. Montrer par récurence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geqslant 1$ on a :
$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$
4. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
5. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)