1 Exercices

Exercice 1.1 Rechercher les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(xy) = f(x)f(y)$

Exercice 1.2 On considère l'équation différentielle $(E) : y'(x) = y(1-x)$

1. Montrer que toute solution de (E) est solution d'une équation différentielle du second ordre.
2. Déterminer toutes les solutions de (E)

Exercice 1.3 On considère les équations différentielles

$$(E) : y" + y = \frac{x^2}{2}; \quad (F) : y" + y = \frac{x^2 \cos 2x}{2}; \quad (G) : y" + y = x^2 \cos^2 x$$

1. Résoudre les équations différentielles (E) et (F).
2. Montrer que la somme d'une solution de (E) et d'une solution de (F) est une solution de (G).
3. Résoudre l'équation différentielle (G)

Exercice 1.4 Soit f une fonction dérivable sur un certain intervalle ouvert $I =]-a, a[$ avec $a > 0$ et telles que

$$\forall x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}], \quad -1 < f(x) < 1 \quad \text{et} \quad \forall x, y \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}], \quad f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$$

1. Calculer $f(0)$ puis montrer que f est solution d'une équation différentielle simple.
2. Déterminer la dérivée de $x \mapsto \arctan(f(x))$. En déduire l'expression de f et la valeur maximale de a.

Exercice 1.5 1. Résoudre l'équation différentielle $|x|\, y' + (x-1)y = x^3$

2. Discuter la possibilité d'un raccordement

Exercice 1.6 On considère l'équation différentielle $(E) : (1+x^2)^2 y" + 2x(1+x^2)y' + a^2 y = 0$

1. Soit y une solution de (E). On introduit la fonction z définie par $z = y(\tan t)$.
   Montrer que z est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
2. En déduire les solutions de (E)

2 Indications

3 Corrections