1 Exercices

Exercice 1.1 On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & (2x+2y+z, x+3y+z, x+2y+2z) \end{array} \right.$

1. Justifier rapidement que f est une application linéaire.
2. Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}) \oplus \ker(f - 5\,\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$
3. Montrer que f est injective et surjective.
4. Déterminer
   - le projecteur p_1 de $\mathbb{R}^3$ sur $\ker(f - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(f - 5\,\mathrm{Id})$
   - le projecteur p_2 de $\mathbb{R}^3$ sur $\ker(f - 5\,\mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(f - \mathrm{Id})$
5. Que peut-on dire de $p_1 + p_2$? de $p_1 \circ p_2$? de $p_2 \circ p_1$?

Exercice 1.2 Démontrer que $\forall n \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^x$

Exercice 1.3 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & (x+6y+3z, 3x+4y+3z, 3x+6y+z) \end{array} \right.$

1. Montrer que f est une application linéaire injective.
2. Montrer que $p = \frac{1}{12}(f + 2\,\mathrm{Id})$ et $q = \frac{1}{12}(10\,\mathrm{Id} - f)$ sont deux projecteurs.
3. Les caractériser géométriquement. Que vaut $p \circ q$ et $q \circ p$?
4. Exprimer f comme une combinaison linéaire de p et q.
5. Calculer f^2 et f^3 en fonction de p et q. Donner l'expression de f^n en fonction de n, p et q.

Exercice 1.4 On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & (2x, -2x+2y+2z, 4x-2z) \end{array} \right.$

1. Montrer rapidement que f est une application linéaire.
2. Caractériser géométriquement les applications $g = f + 2\,\mathrm{Id}$ et $h = f - 2\,\mathrm{Id}$.
3. Calculer $g \circ h$ et $h \circ g$.
4. Ecrire f comme une combinaison de g et h. En déduire f^n.

Exercice 1.5 Soit x un réel. Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{ll} A_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} & B_n = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ C_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} & D_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \end{array}$$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. RAS
2. Remarquer pour commencer que

$$y \in \ker(f - a\,\mathrm{Id}) \Leftrightarrow (f - a\,\mathrm{Id})(y) = 0 \Leftrightarrow f(y) - ay = 0 \Leftrightarrow f(y) = ay$$

   Procéder par analyse avec $x = y + z$, $y \in \ker(f - \mathrm{Id})$ et $z \in \ker(f - 5\,\mathrm{Id})$, composer par f pour obtenir une expression de $f(x)$ en fonction de y et z. On obtient ainsi deux équations à deux inconnues (y, z) dépendant de x et $f(x)$. En déduire l'expression de y et z en fonction de x et $f(x)$. Procéder alors à l'analyse (on n'oubliera pas de vérifier que $f(y) = y$ et $f(z) = 5z$)

3. Pour l'injectivité, utiliser que $x = y + z$, avec y et z défini dans la question précédente et que y et z sont linéairement indépendants.
   Pour la surjectivité, procéder de même avec x et x' tels que $f(x) = x'$ pour obtenir l'expression de x en fonction de x'.
4. La question 2) répond à la question (revoir si nécessaire la définition d'un projecteur)
5. RAS

Indication pour l'exercice 1.2 : Procéder par récurrence en introduisant la fonction $T_n(x) = S_n - e^x$. Pour l'hérédité, étudier les variations de T_{n+1} (sa dérivée est T_n) puis évaluer cette fonction en 0

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Pour la linéarité, RAS, pour l'injectivité, résoudre l'équation $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ pour expliciter le noyau (3 équations à trois inconnues) et se rappeler la caractérisation de l'injectivité par le noyau
2. Soit on calcule explicitement $p(x, y, z)$ puis $p(p(x, y, z))$ pour obtenir que $p^2 = p$ (mais c'est barbare, sauf pour Conan :=)), soit on remarque que $(f + 2\,\mathrm{Id})^2 = f^2 + 4f + 4\,\mathrm{Id}$ (cela résulte de la linéaire de f) et on en déduit aisément que $p^2 = p$
   Itou pour q
3. Un projecteur est un projecteur sur les invariants parallèlement au noyau
4. Chercher α et β tel que $f = \alpha p + \beta q$ en n'oubliant pas que p et q s'exprime en fonction de f
5. Vérifier par un calcul direct (formelle, sans calculer explicitement les composées) que $(\alpha p + \beta q)^2 = \alpha^2 p + \beta^2$ et $(\alpha p + \beta q)^3 = \alpha^3 p + \beta^3 q$ et généraliser par récurrence.

Indication pour l'exercice 1.4 :

1. RAS
2. Un projecteur est un projecteur sur les invariants parallèlement au noyau
3. RAS
4. Chercher α et β pour que $f = \alpha g + \beta h$ (g et h s'expriment à l'aide de f)
   Vérifier que $f^2 = \alpha^2 g + \beta^2 h$ et $f^3 = \alpha^2 g + \beta^3 h$ puis procéder par récurrence.

Indication pour l'exercice 1.5 : Pour la première, le binôme, pour la seconde, vérifier que $kC_n^k = nC_{n-1}^k$ (attention aux conditions de validité), la troisième résulte de l'itération de la formule précédente. La quatrième est conséquence des deux précédentes.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.4 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.5 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)