1 Exercices

Exercice 1.1 Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x \quad \lim_{x \to +\infty} x(x^{1/x} - 1) \quad \lim_{x \to 3} \frac{\ln(x) - \ln 3}{x - 3}$

Exercice 1.2

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos nx = P_n(\cos x) \qquad \text{et} \qquad \sin(n+1)x = (\sin x) Q_n(\cos x)$$

2. Déterminer la relation liant P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.
3. Déterminer le degré de P_n et Q_n ainsi que leurs coefficients dominants respectifs.
4. Trouver toutes les racines de P_n et Q_n

Exercice 1.3 On considère, pour tout entier n, les fonctions $f_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$

1. Montrer que f_n est un polynôme de degré n et expliciter ses coefficients.
2. Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 1.4 Soit $m > n$ deux entiers.
Déterminer la division euclidienne de $X^m - \varepsilon$ par $X^n - \varepsilon$ lorsque $\varepsilon = 1$ puis $\varepsilon = -1$

Exercice 1.5 Soit P un polynôme de la forme $P(X) = X^3 + pX + q$ où $p, q \in \mathbb{R}$

1. Montrer que P possède une racine double ssi $4p^3 + 27q^2 = 0$
2. On suppose que P possède 3 racines réelles distinctes.
   (a) Montrer que $4p^3 + 27q^2 < 0$.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ $\lim_{x\to+\infty} x(x^{1/x}-1)$ $\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x)-\ln 3}{x-3}$

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos nx = P_n(\cos x) \qquad \text{et} \qquad \sin(n+1)x = (\sin x)Q_n(\cos x)$$

2. Déterminer la relation liant P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.
3. Déterminer le degré de P_n et Q_n ainsi que leurs coefficients dominants respectifs.
4. Trouver toutes les racines de P_n et Q_n

Indication pour l'exercice 1.3 : On considère, pour tout entier n, les fonctions $f_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$

1. Montrer que f_n est un polynôme de degré n et expliciter ses coefficients.
2. Montrer que la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Indication pour l'exercice 1.4 : Soit $m > n$ deux entiers.
Déterminer la division euclidienne de $X^m - \varepsilon$ par $X^n - \varepsilon$ lorsque $\varepsilon = 1$ puis $\varepsilon = -1$

Indication pour l'exercice 1.5 : Soit P un polynôme de la forme $P(X) = X^3 + pX + q$ où $p, q \in \mathbb{R}$

1. Montrer que P possède une racine double ssi $4p^3 + 27q^2 = 0$
2. On suppose que P possède 3 racines réelles distinctes.
   (a) Montrer que $4p^3 + 27q^2 < 0$.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ $\lim_{x\to+\infty} x(x^{1/x}-1)$ $\lim_{x\to 3}\frac{\ln(x)-\ln 3}{x-3}$

Correction de l'exercice 1.2 :

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos nx = P_n(\cos x) \qquad \text{et} \qquad \sin(n+1)x = (\sin x)Q_n(\cos x)$$

2. Déterminer la relation liant P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.
3. Déterminer le degré de P_n et Q_n ainsi que leurs coefficients dominants respectifs.
4. Trouver toutes les racines de P_n et Q_n

Correction de l'exercice 1.3 : On considère, pour tout entier n, les fonctions $f_n(t) = e^t\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})$

1. Montrer que f_n est un polynôme de degré n et expliciter ses coefficients.
2. Montrer que la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction de l'exercice 1.4 : Soit $m > n$ deux entiers.
Déterminer la division euclidienne de $X^m - \varepsilon$ par $X^n - \varepsilon$ lorsque $\varepsilon = 1$ puis $\varepsilon = -1$

Correction de l'exercice 1.5 : Soit P un polynôme de la forme $P(X) = X^3 + pX + q$ où $p, q \in \mathbb{R}$

1. Montrer que P possède une racine double ssi $4p^3 + 27q^2 = 0$
2. On suppose que P possède 3 racines réelles distinctes.
   (a) Montrer que $4p^3 + 27q^2 < 0$.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?