1 Exercices

Exercice 1.1 On considère les polynômes $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ si $k \geqslant 1$ et $\binom{x}{0} = 1$

1. Montrer que la famille $\left[\binom{x}{k}, \quad k \in [\![0,n]\!]\right]$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Est-une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, déterminer les réels $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{x}{k}$.
4. On suppose que $P(0), .., P(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Exercice 1.2 On considère la fonction $f(x) = (1 + \dfrac{1}{x})^{x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les asymptotes de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$. Recherche un DL en -1^+.

Exercice 1.3 1. Justifier que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x+y-2z = t$ et $t-x+y = 0\}$ est un espace vectoriel$\left\{ \begin{array}{l} x+y-2z=t \\ t-x+y=0 \end{array}\right.$

2. Expliciter une famille génératrice.
3. On note

$$\mathcal{B}_1 = [(1,1,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(-1,4,0,1),] \quad \mathcal{B}_2 = [(1,1,1,0),(1,0,0,1),(0,-1,1,0),(-1,4,0,1),]$$

$\mathcal{B}_1$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$? Quant est-il de $\mathcal{B}_2$?

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : On considère les polynômes $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ si $k \geqslant 1$ et $\binom{x}{0} = 1$

1. Montrer que la famille $\left[\binom{x}{k}, \quad k \in [\![0, n]\!]\right]$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Est-une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, déterminer les réels $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ tels que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \binom{x}{k}$.
4. On suppose que $P(0), .., P(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Indication pour l'exercice 1.2 : On considère la fonction $f(x) = (1 + \dfrac{1}{x})^{x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les asymptotes de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$. Recherche un DL en -1^+.

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Justifier que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x + y - 2z = t$ et $t - x + y = 0\}$ est un espace vectoriel$\left\{\begin{array}{c} x + y - 2z = t \\ t - x + y = 0 \end{array}\right.$
2. Expliciter une famille génératrice.
3. On note

$$\mathcal{B}_1 = [(1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (-1, 4, 0, 1),] \quad \mathcal{B}_2 = [(1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0), (-1, 4, 0, 1),]$$

   $\mathcal{B}_1$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$? Quant est-il de $\mathcal{B}_2$?

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : On considère les polynômes $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ si $k \geqslant 1$ et $\binom{x}{0} = 1$

1. Montrer que la famille $\left[\binom{x}{k},\quad k \in [\![0,n]\!]\right]$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Est-une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, déterminer les réels $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{x}{k}$.
4. On suppose que $P(0),..,P(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 1.2 : On considère la fonction $f(x) = (1+\dfrac{1}{x})^{x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les asymptotes de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer $\lim_{x\to -1^-} f(x)$. Recherche un DL en -1^+.

Correction de l'exercice 1.3 :

1. Justifier que $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x+y-2z = t$ et $t-x+y = 0\}$ est un espace vectoriel$\left\{\begin{array}{c} x+y-2z=t \\ t-x+y=0 \end{array}\right.$
2. Expliciter une famille génératrice.
3. On note

   $$\mathcal{B}_1 = [(1,1,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(-1,4,0,1),] \quad \mathcal{B}_2 = [(1,1,1,0),(1,0,0,1),(0,-1,1,0),(-1,4,0,1),]$$

   $\mathcal{B}_1$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$? Quant est-il de $\mathcal{B}_2$?