1 Exercices

Exercice 1.1 Soient u, v deux endomorphismes de E, qui est de dimension finie.
On suppose que $u + v$ est inversible et $u \circ v = 0$

1. Donner des inclusions liants $\operatorname{Im} u$, $\operatorname{Im} v$, $\ker u$ et $\ker v$.
2. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$

Exercice 1.2

1. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ se prolonge en 0 et donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de f
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1 + \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution u_n
3. Donner la monotonie de la suite u et calculer de sa limite.
4. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 1.3 Pour tout entier naturel n, on considère l'équation $(F_n) : x^n + 5x - 1 = 0$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation (F_n) admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$.
   On note β_n cette solution.
2. Calculer β_0, β_1, β_2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta_n)^n = 0$.
3. Quelle est la limite de la suite β_n ? Donner un équivalent de β_n.

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Soient u, v deux endomorphismes de E, qui est de dimension finie.
On suppose que $u + v$ est inversible et $u \circ v = 0$

1. Donner des inclusions liants $\operatorname{Im} u$, $\operatorname{Im} v$, $\ker u$ et $\ker v$.
2. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ se prolonge en 0 et donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de f
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1 + \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution u_n
3. Donner la monotonie de la suite u et calculer de sa limite.
4. Déterminer un équivalent de u_n.

Indication pour l'exercice 1.3 : Pour tout entier naturel n, on considère l'équation $(F_n) : x^n + 5x - 1 = 0$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation (F_n) admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$.
   On note β_n cette solution.
2. Calculer β_0, β_1, β_2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\beta_n)^n = 0$.
3. Quelle est la limite de la suite β_n ? Donner un équivalent de β_n.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Soient u, v deux endomorphismes de E, qui est de dimension finie. On suppose que $u + v$ est inversible et $u \circ v = 0$

1. Donner des inclusions liants $\operatorname{Im} u$, $\operatorname{Im} v$, $\ker u$ et $\ker v$.
2. Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$

Correction de l'exercice 1.2 :

1. Justifier que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ se prolonge en 0 et donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de f
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1 + \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution u_n
3. Donner la monotonie de la suite u et calculer de sa limite.
4. Déterminer un équivalent de u_n.

Correction de l'exercice 1.3 : Pour tout entier naturel n, on considère l'équation $(F_n) : x^n + 5x - 1 = 0$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation (F_n) admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$.
   On note β_n cette solution.
2. Calculer β_0, β_1, β_2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (\beta_n)^n = 0$.
3. Quelle est la limite de la suite β_n ? Donner un équivalent de β_n.