PHEC1 devoir surveillé 3 2001-2002

www.mathematiques.ht.st

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 2 pages et de trois exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 3h

Bonne chance

Exercice 1
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

1. Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que f est C^1 sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée.
3. Etudier les variations de f ainsi que ses limites en -∞ et $+\infty$.
4. Montrer que f réalise une bijection de $[-1;1]$ sur un intervalle $[a;b]$ que l'on déterminera. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
5. Vérifier que f^{-1} est dérivable sur $]a;b[$. Est-elle dérivable en a? en b?.

Exercice 2
On considère la fonction $f :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est continue sur $]-1;+\infty[$.
   (b) A l'aide d'un développement en 0, montrer que f est dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?
   (c) Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,0[\bigcup]0,+\infty[$.
   (d) Pour tout réel x de $]-1,0[\bigcup]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$.
   (e) Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$lorsque x tend vers 0 .
   (f) En déduire que f est de classe C^1 sur $]-1;+\infty[$.
2. Montrer que, $\forall x \in]-1,0[\bigcup]0,+\infty[$,.on a

$$\frac{x}{x+1} - \ln(1+x) \leq 0.$$

3. En déduire les variations de f . On précisera les limites de f en -1 et en $+\infty$.

Exercice 3

On considère la fonction définie sur $]-1;2[$ par

$$f(x) = \ln(-x^2 + x + 2).$$

1. Justifier que f est C^2 sur $]-1;2[$.

   (a) Vérifier que $\forall x \in]-1;2[$, on a
   $$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2}.$$

   (b) Quelle est la monotonie de f' sur l'intervalle $]-1;2[$?

   (c) En déduire que $\forall x \in [0;1]$, on a
   $$\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

   (d) Prouver que $\forall x \in [0;1]$, on a
   $$|f(x) - \ln 2| \leq \frac{1}{2}x.$$

   (e) Déterminer la tangente de $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   (f) En déduire que $\forall x \in]-1;2[$
   $$f(x) \leq \ln 2 - \frac{1}{2}(x-1)$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f en $\frac{1}{2}$.