La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 3 pages et de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

EXERCICE 1 (Extrait EM Lyon 1987)

On considère la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+10}$.

1. (a) Calculer f'. Etudier les variations de la fonction f.
   (b) Calculer f''. Démontrer que, $\forall x \in [0,1] \quad 0,09 \leqslant f'(x) \leqslant 0,225$.
   Données numériques : $0.224 \leqslant \dfrac{10e}{121} \leqslant 0.225$.
   (c) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans $[0,1]$, qui sera notée α.
   Données numériques $\dfrac{e}{11} \simeq 0.25 \pm 10^{-2}$
   (d) Montrer que $f(x) - x \geqslant 0$ sur $[0, \alpha]$
2. On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Justifier que la suite u converge vers α.
   (d) Etablir que, pour $n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0.225\, |u_n - \alpha|$.
   (e) Comment choisir n pour que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$?
   Données numériques : $\dfrac{-3\ln 10}{\ln(0.225)} \simeq 4.63 \pm 10^{-2}$.

EXERCICE 2 (Extrait Ecricome 2001)

Le but de la première partie est de calculer les puissances successives de la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a représente un nombre réel.

1. Montrer que, pour tous réels a, b, on a : $M(a).M(b) = M(a+b-3ab)$.
2. En déduire les valeurs de a pour lesquelles la matrice $M(a)$ est inversible et exprimer son inverse.
3. Déterminer le réel a_0 **non nul**, tel que : $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$
4. On considère les matrices : $P = M(a_0)$ et $Q = I_3 - P$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel α, que l'on exprimera en fonction de a, tel que : $M(a) = P + \alpha Q$
   (b) Calculer P^2, QP, PQ, Q^2.
   (c) Pour tout entier naturel n, non nul, montrer que $[M(a)]^n = P + \alpha^n Q$.
   Expliciter alors la matrice $[M(a)]^n$.

EXERCICE 3 (Extrait ESSEC 2002)

Soient a un réel positif et N en entier naturel non nul.

1. **Etude de l'équation** $x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$
   On note f_N la fonction polynôme définie par $f_N(x) = x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a$.
   (a) Montrer que l'équation $f_N(x) = 0$ possède une racine strictement positive x_N et une seule, puis montrer que celle-ci appartient à $]0,1[$ lorsque $N > a$
   (b) Montrer la relation $(*)$: $(x-1) f_N(x) = x^{N+1} - (a+1)x + a$
2. **Racine positive de l'équation** $x^N + x^{N-1} + \cdots + x^2 + x - a = 0$
   (a) Montrer que $f_{N+1}(x_N) > f_N(x_N)$ et en déduire que la suite (x_N) est strictement décroissante.
   En déduire que la suite (x_N) converge vers un nombre x^* appartenant à $[0,1[$
   (b) Montrer que $0 < x_N \leqslant x_A$, puis que $0 < (x_N)^N \leqslant (x_A)^N$ lorsque $N \geqslant A$ où A est un entier naturel non nul.
   En choisissant $A \geqslant a$, en déduire la limite de la suite $\left(|x_N|^N\right)$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis, à l'aide de la relation $(*)$, exprimer la limite x^* en fonction de a.
   On convient alors de poser $x_N = \dfrac{a}{a+1}(1+\varepsilon_N)$, et ε_N tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$
   (c) Etablir à l'aide de la relation $(*)$ l'égalité suivante :
   $$(N+1)\varepsilon_N \left[\ln\left(\frac{a}{a+1}\right) + \ln(1+\varepsilon_N)\right] = \varepsilon_N \ln(\varepsilon_N) + \varepsilon_N \ln(a)$$
   En déduire les limites de $(N+1)\varepsilon_N$ et de $(1+\varepsilon_N)^{N+1}$ lorsque N tend vers $+\infty$, puis déterminer à l'aide de la relation $(*)$ un équivalent de ε_N en fonction de a et de N.

Exercice 4 (EM Lyon 1997)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de "pile" soit égale à p , $p \in]0;1[$.
On pourra noter $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul fixé.
On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de " 6" obtenus, on lance alors n fois la pièce.
On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de "6" obtenus aux lancers du dé,
- X indique le nombre de "piles" obtenus aux lancers de la pièce,
- Y indique le nombre de "faces" obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(Z=n)}(X = k)$.
   On distinguera les cas : $k \leqslant n$ et $k > n$.
3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :
   - si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ alors $P\left(X = k \text{ et } Z = n\right) = \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$
   - si $n > N$ ou $k > n$ alors $P\left(X = k \text{ et } Z = n\right) = 0$
4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$
5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$: $\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$
6. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$
   $$\sum_{n=k}^{N} \binom{N-k}{n-k} \left(\frac{1-p}{5}\right)^n = \left(\frac{1-p}{5}\right)^k \sum_{n=0}^{N-k} \binom{N-k}{n} \left(\frac{1-p}{5}\right)^n = \left(\frac{1-p}{5}\right)^k \left(\frac{6-p}{5}\right)^{N-k}$$
7. Justifier que, pour $k \in [\![0, N]\!]$, $\quad P(X = k) = \sum\limits_{n=k}^{N} P(X = k \text{ et } Z = n)$
   puis montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \dfrac{p}{6})$.
   En déduire son espérance et sa variance. Quelle est l'espérance de Y ?